B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XX, 21

W. F. OSGOOD

LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

II, 1

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XX, 21

LEHRBUCH
DER
FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. W. F. OSGOOD
ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER HARVARD-UNIVERSITÄT
CAMBRIDGE, MASS. (V. ST. A.)

ZWEITER BAND · ERSTE LIEFERUNG

ZWEITE AUFLAGE

MIT 6 FIGUREN

1929
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Vorwort zur ersten Lieferung.

Die allgemeine Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Größen hat seit der Wende des Jahrhunderts bedeutende Fortschritte gemacht. Während bis dahin, außer den unmittelbaren Übertragungen bekannter Sätze im Falle einer unabhängigen Veränderlichen, kaum mehr als der Weierstraßsche Vorbereitungssatz und die Sätze von Cousin zu verzeichnen waren, erfuhr die Theorie bald darauf durch die Untersuchungen von Hartogs und E. E. Levi eine wesentliche Erweiterung. Auch die Veröffentlichung des zweiten Weierstraßschen Satzes bezüglich impliziter Funktionen, nebst den Untersuchungen amerikanischer Mathematiker betreffend die Umkehrung einer Transformation bei verschwindender Jacobischer Determinante, fiel in diese Zeit. Es tut jetzt not, diesen ganzen Stoff zu schichten und zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten, zumal deshalb, weil die Einfachheit manches Ergebnisses erst dann klar hervortritt, wenn dasselbe im Rahmen einer systematischen Darstellung verwandter Erscheinungen steht.

Die ersten drei Kapitel des zweiten Bandes der *Funktionentheorie*, woraus die vorliegende Lieferung besteht, bringen eine solche Durcharbeitung der Theorie. Darauf folgt eine Behandlung der periodischen Funktionen mehrerer Argumente, und nach einer Einleitung in die Theorie der algebraischen Funktionen nebst den damit verwandten transzendenten Funktionen (Abelsche Integrale, polymorphe Funktionen) gipfelt die ganze Entwicklung in einem Beweise des Riemann-Weierstraßschen Thetatheorems.

Cambridge (Massachusetts), im Januar 1924.

W. F. Osgood.

Vorwort zur zweiten Auflage der ersten Lieferung.

Außer einer gründlichen Revision des Textes, welche ja zu manchen kleineren Ergänzungen geführt hat, ist namentlich am Ende des dritten Kapitels eine Neugestaltung des Stoffes dadurch erforderlich geworden, daß es nunmehr gelungen ist, den Weierstraßschen Satz betreffend rationale Funktionen auf alle erweiterten Räume auszudehnen, welche ähnlich wie beim projektiven Raume, beim Raume der Funktionentheorie, sowie beim Raume der Geometrie der reziproken Radien durch Adjungierung eines unendlich fernen Bereiches zu einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit emporgehoben werden. Durch diese Weiterführung ist jener grundlegende Satz auch nach dieser Richtung hin zu einem befriedigenden Abschluß gebracht worden.

Cambridge (Massachusetts), den 1. November 1928.

W. F. Osgood.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Größen.

Erstes Kapitel.

Integraldarstellungen und mehrfache Reihen. Die erweiterten Räume.

Zweites Kapitel.

Implizite Funktionen. Teilbarkeit.

Drittes Kapitel.

Singuläre Stellen und analytische Fortsetzung. Rationale Funktionen.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Größen.

Erstes Kapitel.

Integraldarstellungen und mehrfache Reihen. Die erweiterten Räume.

§ 1. Reguläre und analytische Kurven des reellen m-dimensionalen Raumes.

Wir wollen uns vorerst (§§ 1—3) die Grundbegriffe ins Gedächtnis zurückrufen, worauf die Begriffe: *Funktion*, *Grenzwert* und *Stetigkeit* im Falle beliebig vieler reeller Argumente beruhen.

Handelt es sich um einen Komplex von m reellen Größen, $(x_1, \ldots, x_m)$, so werden wir denselben als einen *Punkt* des m-dimensionalen Raumes benennen, und die einzelnen Größen $x_1, \ldots, x_m$ als dessen *Koordinaten* bezeichnen.[1]) Wir schreiben auch (x) als Abkürzung für $(x_1, \ldots, x_m)$.

Unter einem *regulären Kurvenstücke* C verstehen wir eine Menge $\{(x)\}$ von Punkten (x), deren Koordinaten sich folgendermaßen darstellen lassen (I, 2 § 2):

$$(1) \qquad x_k = f_k(t), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Dabei bedeutet $f_k(t)$ eine im abgeschlossenen Intervalle (a, b) reelle stetige, mit einer daselbst ebenfalls stetigen Ableitung $f'_k(t)$ versehene Funktion; fernerhin sollen für keine zwei Punkte t_1, t_2 des Intervalls die m Gleichungen

$$(2) \qquad f_k(t_1) = f_k(t_2), \qquad k = 1, \ldots, m,$$

---

1) Vgl. Bd. 1 dieses Werkes, Kap. 1, § 8. Solche Zitate werden, wie folgt, abgekürzt: (I, 1 § 8). Damit ist die fünfte Auflage, 1928, gemeint.

gleichzeitig bestehen; und endlich verschwinden die m Ableitungen niemals gleichzeitig:

$$0 < |f_1'(t)| + \cdots + |f_m'(t)|. \tag{3}$$

Eine *reguläre Kurve* entsteht durch Aneinanderreihung einer endlichen Anzahl regulärer Kurvenstücke, ähnlich wie im angeführten Falle $m = 2$. Sie läßt sich ebenfalls durch Gleichungen der Form (1) darstellen, wobei jetzt $f_k(t)$ im abgeschlossenen Intervalle (a, b) stetig ist und, höchstens von einer endlichen Anzahl von Punkten $t = \tau$ abgesehen, eine stetige Ableitung besitzt. In jedem Punkte τ existiert sowohl $\lim\limits_{t=\tau+} f_k'(t)$ als $\lim\limits_{t=\tau-} f_k'(t)$, aber mindestens für einen Wert von k stimmen diese beiden Grenzwerte nicht überein. Außerdem besteht die Relation (3) in jedem gewöhnlichen Punkte; in den Ausnahmepunkten gilt diese Relation sowohl für die vorwärts als für die rückwärts genommenen Ableitungen.

Eine reguläre Kurve heißt *geschlossen*, falls

$$f_k(a) = f_k(b), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Sie heißt *einfach*, wenn die Gleichungen (1) höchstens für den Fall gelten, daß t_1, t_2 mit den beiden Endpunkten a, b des Intervalls zusammenfallen. Sonst hat sie mindestens einen *mehrfachen Punkt*.

Eine reguläre Kurve heißt *analytisch*, falls jede der Funktionen $f_k(t)$ im abgeschlossenen Intervalle (a, b) analytisch ist (I, S. 124). Sie besteht aus einem *analytischen Kurvenzuge* oder sie heißt eine *gebrochene analytische Kurve*, falls sie sich in eine endliche Anzahl aneinander gereihter analytischer Kurven zerlegen läßt.

Unter einer *Geraden* versteht man eine reguläre Kurve, wofür jede $f_k(t)$ als eine ganze lineare Funktion von t genommen werden kann. Eine *gebrochene Linie* oder ein *Polygonzug* setzt sich aus lauter aneinander gereihten Geraden zusammen.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß eine reguläre Kurve schon im Falle $m = 2$ unendlich viele mehrfache Punkte besitzen kann, ohne daß zusammenfallende Bogen vorhanden wären, während dies bei einer analytischen Kurve niemals eintreten kann. Kommt es bei einem analytischen Kurvenzuge vor, so besteht derselbe zum Teil aus zusammenfallenden Bogen. Die Anzahl letzterer, sowie der nicht dazu gehörigen mehrfachen Punkte, wird stets endlich

sein. Im übrigen wird ein analytischer Kurvenzug von der linearen Mannigfaltigkeit

$$x_k = a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, l < m,$$

höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten und Bogen getroffen.

§ 2. Das m-dimensionale Kontinuum.

Ein Punkt $(a) = (a_1, \ldots, a_m)$ einer Menge $\{(x)\}$ heißt ein *innerer Punkt* derselben, falls es eine positive Größe h gibt, derart, daß alle an die Bedingung

$$|x_k - a_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

geknüpften Punkte zur Menge gehören[1]; (I, 5 § 2).

Eine Menge $\{(x)\}$ bildet ein *Kontinuum*, falls jeder Punkt derselben ein innerer Punkt ist, und falls außerdem je zwei ihrer Punkte durch eine reguläre, lediglich aus Punkten der Menge bestehende Kurve miteinander verbunden werden können.

Unter der *Umgebung*, *Nähe* oder *Nachbarschaft* eines Punktes (a) versteht man ein Kontinuum, welches (a) enthält; (I, 1 § 8). Im übrigen liegt gewöhnlich noch in diesem Begriffe die weitere Forderung, daß die Ausdehnung dieses Kontinuums beliebig beschränkt werden darf; daß also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe h das Kontinuum dann so gewählt werden kann, daß $|x_k - a_k| < h$, $k = 1, \ldots, m$. Andererseits ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß man von einer *bestimmten* oder *geeigneten* Umgebung spricht, womit eben gemeint ist, daß h nur einmal gewählt und dann festgehalten wird. Demgegenüber wird der zuerst erklärte Sinn des Wortes wohl dadurch verschärft, daß man von einer *beliebigen* Umgebung spricht. So trifft es beispielsweise zu, daß die Umgebung eines Punktes $(b_1, \ldots, b_m)$ gleichsam eine Funktion der Umgebung eines zweiten Punktes $(a_1, \ldots, a_m)$ wird, indem nach willkürlicher Angabe der letzten Umgebung stets eine bestimmte Wahl der ersteren möglich ist, welche den Forderungen des in Betracht kommenden Satzes entspricht.

---

1) Diese Definition erfährt eine Erweiterung, wenn es sich um k-dimensionale, in einem $m = (k + r)$-fach ausgedehnten Raume gelegene Mengen handelt. Vorläufig ist aber $k = m$, $r = 0$. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für das Kontinuum.

Ein *Randpunkt* eines Kontinuums ist jeder Punkt, in dessen Umgebung[1]) sowohl Punkte des Kontinuums als auch solche Punkte liegen, welche nicht zum Kontinuum gehören; (I, 2 § 2). Wie man sieht, gehört einem Kontinuum keiner seiner Randpunkte an.

Unter einem *Bereich* des m-dimensionalen Raumes verstehen wir ein Kontinuum, wozu noch ein Teil der Randpunkte oder auch alle derselben gezählt werden dürfen.

Einiges über Punktmengen. Eine Punktmenge $\{(x)\}$ liegt *im Endlichen,* wenn jede Koordinate x_k endlich bleibt. Die Begriffe *Häufungsstelle, abgeschlossen* und *perfekt* werden auch ähnlich wie in den früheren Fällen $m = 1, 2$ erklärt, und brauchen deshalb nicht weiter besprochen zu werden; (I, 1 § 8).

Unter der *Ableitung* einer Punktmenge versteht man die Menge der Häufungsstellen derselben.

Unter der *Entfernung* D zweier Punkte (a) und (b) ist die Zahl

$$D = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_m - b_m)^2}$$

gemeint. Zuweilen empfiehlt es sich, die *Abweichung* oder den *Abstand* (écart) der Punkte zu gebrauchen. Dieser soll, wie folgt, definiert werden:

$$\Delta = |a_1 - b_1| + \cdots + |a_m - b_m|.$$

Es ist $$D \leqq \Delta, \qquad \Delta \leqq \sqrt{m}D.$$

Eine Punktmenge M *hängt zusammen,* falls je zwei Punkten (a) und (b) derselben und jeder positiven Zahl ε eine Reihe zur Menge gehöriger Punkte $(a^{(1)}), \ldots, (a^{(n-1)})$ — wobei noch $(a^{(0)}) = (a)$ und $(a^{(n)}) = (b)$ gesetzt werden mögen — zugeordnet werden können derart, daß die Entfernung zwischen $(a^{(k)})$ und $(a^{(k+1)})$ kleiner als ε ausfällt.

Wir haben den folgenden von Weierstraß herrührenden Satz bereits früher (I, S. 35) allgemein ausgesprochen.

Satz. *Ist P eine unendliche im Endlichen gelegene Punktmenge, so hat P mindestens eine Häufungsstelle, welche indessen nicht zur Menge zu gehören braucht.*

Zusatz. *Ist P eine in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{S}$ gelegene unendliche Punktmenge, so hat P mindestens eine Häufungsstelle, und zwar liegt jede Häufungsstelle von P in $\mathfrak{S}$.*

---

1) Hier ist das Wort *Umgebung* im Sinne einer *beliebig kleinen* Umgebung gebraucht.

§ 3. Funktion, Grenzwert und Stetigkeit.

Der früher auseinandergesetzte Begriff einer *Funktion* (I, 1 § 1) läßt sich auch hier direkt übertragen. Im einfachsten Falle wird ein Bereich $\mathfrak{T}$ vorgelegt, dessen Punkten dann je eine zweite reelle Zahl u zugeordnet wird. Alsdann heißt u eine Funktion[1]) von $(x_1, \ldots, x_m)$:

$$u = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Es dürfen also die Randpunkte zum Teil oder ganz zum Bereiche gerechnet werden. Allgemeiner darf an Stelle von $\mathfrak{T}$ jede beliebige unendliche[2]) Menge $\{(x)\}$ treten, während andererseits den Punkten von $\{(x)\}$ mehrere (auch unendlich viele) Werte $u_1, u_2, \ldots$ zugeordnet werden können. Wir werden uns indessen, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt wird, auf *eindeutige* Funktionen beschränken.

Der Zusatz von Bd. I, S. 37 gilt auch für Funktionen mehrerer Variabelen. Wir fügen zugleich noch einen weiteren Teil hinzu:

Theorem: *Ist $f(x_1, \ldots, x_m)$ eine beliebige Funktion, welche algebraisch genommen unter (über) einer festen Zahl bleibt, so hat $f(x_1, \ldots, x_m)$ eine obere (untere) Grenze.*

Liegt die Menge P der Punkte, in welchen die Funktion definiert ist, im Endlichen, so sind zwei Fälle möglich:

a) *die Funktion erreicht ihre obere (untere) Grenze in einem Punkte von P; besitzt also ein Maximum (Minimum);*

b) *im anderen Falle gibt es einen Punkt $(x_1', \ldots, x_m')$, in dessen Umgebung die Funktion ihrer oberen (unteren) Grenze beliebig nahekommt. Der Punkt $(x_1', \ldots, x_m')$ braucht nicht zu P zu gehören, befindet sich aber sonst notwendig unter den Punkten der Ableitung von P.*

Die früheren Definitionen: *Grenzwert, stetig, gleichmäßig stetig* (I, 1 §§ 2—4 und I, 2 §§ 1, 2) lassen sich auch hier direkt übertragen. Das du Bois-Reymondsche Theorem (I, S. 30, 53), betreffend die Existenz eines Grenzwertes, behält ebenfalls für Funktionen mehrerer Veränderlichen seine Gültigkeit bei.

Auf den Begriff des *Randwertes* (I, S. 56) müssen wir indessen

1) Man vergleiche auch Bd. I, S. 1 Anm. 4.

2) Begrifflich dürfte man ja auch endliche Mengen zulassen, was indessen hier unzweckmäßig wäre.

noch etwas näher eingehen. Der einfachste Fall ist der, daß die Funktion sich ein und demselben Grenzwerte nähert, wie auch immer der Punkt $(x_1, \ldots, x_m)$, stets im Definitionsbereiche der Funktion verbleibend, dem Randpunkte zustrebt. Um uns nun bei dieser Definition nicht ins Allgemeine zu verlieren, wollen wir die Voraussetzung machen, falls mehrfach zu zählende Randpunkte vorliegen, daß der Definitionsbereich der Funktion sich in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegen läßt, derart, daß die Funktion, für einen beliebigen derselben betrachtet, in jedem Randpunkte des bewußten Teilbereiches einen Randwert im obigen Sinne annimmt.

§ 4. Die Stetigkeitssätze.

Die vier Stetigkeitssätze (I, 1 § 4) nehmen jetzt folgende Formulierung an:

1. Satz. *Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ in einem abgeschlossenen Bereiche stetig, so ist dieselbe dort endlich.*

2. Satz. *Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ in einem abgeschlossenen Bereiche stetig, so nimmt sie dort einen größten, sowie einen kleinsten Wert an.*

3. Satz. *Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ in einem beliebigen Bereiche $\mathfrak{T}$ stetig und ist $f(a_1, \ldots, a_m) \neq f(b_1, \ldots, b_m)$, wobei $(a_1, \ldots, a_m)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ zwei Punkte von $\mathfrak{T}$ sind; liegt ferner N zwischen den beiden Zahlen $f(a_1, \ldots, a_m)$ und $f(b_1, \ldots, b_m)$, so gibt es mindestens einen Punkt $(x_1', \ldots, x_m')$ von $\mathfrak{T}$, in welchem $f(x_1, \ldots, x_m)$ den Wert N wirklich annimmt:*

$$f(x_1', \ldots, x_m') = N.$$

4. Satz. *Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ in einem abgeschlossenen Bereiche stetig, so ist sie dort auch gleichmäßig stetig.*

Die Beweise dieser Sätze werden gerade so geführt, wie im Falle $m = 1$ (I, 1 §§ 4, 9), nur wird man bei der Begründung des 3. und des 4. Satzes, sofern mehrfache Randpunkte vorliegen, den Definitionsbereich vorerst in Teilbereiche der bewußten Art zerlegen. Den 4. Satz wird man dann für jeden dieser Teilbereiche ohne Schwierigkeit dartun, woraus sich dann der Beweis für den allgemeinen Fall sofort ergibt.

Was endlich den 3. Satz anbetrifft, so sieht man, daß man den Punkt $(a_1, \ldots, a_m)$, falls dieser am Rande liegt, durch einen

benachbarten inneren Punkt $(a_1' \ldots, a_m')$ ersetzen kann, in welchem die Funktion einen nur wenig verschiedenen Wert erhält:

$$f(a_1, \ldots, a_m) - \varepsilon < f(a_1', \ldots, a_m') < f(a_1, \ldots, a_m) + \varepsilon.$$

Und ebenso, falls $(b_1, \ldots, b_m)$ am Rande liegt. Wir dürfen also annehmen, daß sowohl $(a_1, \ldots, a_m)$ als $(b_1, \ldots, b_m)$ innere Punkte sind. Und nun wird man dieselben durch eine im Definitionsbereiche verlaufende reguläre Kurve miteinander verbinden. Nach dem 3. Satze von Bd. I, 1 § 4 wird $f(x_1, \ldots, x_m)$, als Funktion von t betrachtet, den Wert N in einem Punkte dieser Kurve annehmen, womit dann der Satz bewiesen ist.

§ 5. Analytische Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen.

Sei T ein Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes, dessen Punkte die Koordinaten $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ haben. Indem wir die komplexen Variabelen

$$z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$$

bilden, können wir die Punkte von T auch als das geometrische Bild des imaginären Zahlenkomplexes $(z_1, \ldots, z_n)$ auffassen. Diesen Komplex wollen wir gleichfalls als einen *Punkt* bezeichnen, wobei wir eben an den Punkt $(x_1, y_1, x_2, \ldots, y_n)$ denken.[1]

Unter einer *komplexen Funktion* von $(z_1, \ldots, z_n)$ verstehen wir nun eine komplexe Veränderliche

$$w = u + iv = f(z_1, \ldots, z_n),$$

wo u, v reelle Funktionen von $(x_1, \ldots, y_n)$ im Bereiche T vorstellen.

Die früheren Definitionen von *Grenzwert* und *Stetigkeit* lassen sich auf den gegenwärtigen Fall ohne weiteres übertragen.

Die Funktion w soll *im Bereiche* T als *analytisch* erklärt werden, falls w in jedem inneren Punkte von T eindeutig definiert und eine partielle Ableitung nach jedem Argumente $z_1, \ldots, z_n$ daselbst besitzt. Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ ein innerer Punkt von T, so wird $f(a_1, \ldots, z_k, \ldots, a_n)$, als Funktion von z_k allein betrachtet, dem Goursatschen Satze (I, 7 § 16) zufolge, im Punkte $z_k = a_k$ analytisch sein.

---

1) Bisweilen empfiehlt es sich, wie in der algebraischen Geometrie im komplexen Gebiete, den Komplex $(z_1, \ldots, z_n)$ als einen Punkt des sogenannten n-dimensionalen *komplexen* (= *imaginären*) Raumes zu betrachten. Wir werden aber stets, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt wird, den $2n$-dimensionalen reellen Raum benützen.

Es wird sich später ergeben, daß eine in T analytische Funktion daselbst auch stetig ist. Um die Darstellung indessen nicht gleich zu Anfang mit einer sehr speziellen Untersuchung zu belasten, werden wir vor der Hand die weitere Forderung noch in die Definition einer analytischen Funktion mit aufnehmen, daß $f(z_1, \ldots, z_n)$ in T stetig sein soll.

Die Funktion w heißt *analytisch in einem Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes analytisch ist. Sie heißt *in einer Punktmenge* M *analytisch*, wenn sie in jedem Punkte von M analytisch ist.

Einen beliebigen inneren Punkt (a) von T kann man in einen Bereich

$$(T): \qquad |z_k - a_k| \leqq h, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

einbetten, dessen sämtliche Punkte zu T gehören. Ist nun w in T analytisch, so kann man die Cauchysche Integralformel auf (T) direkt anwenden, vgl. § 10 Anm.[1]), woraus denn folgt, daß sämtliche Ableitungen der Funktion vorhanden und stetig sind, und demgemäß sich auch in T analytisch verhalten. Insbesondere gelten die $2n$ Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wobei nun sowohl u als v unbegrenzt oft differenzierbar sind und sämtliche Ableitungen stetig von allen $2n$ reellen Argumenten abhängen.

Die Sätze von Band I, S. 238—9 übertragen sich unmittelbar auf Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Ist insbesondere*

$$w = f(z_1, \ldots, z_n)$$

im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ *analytisch, und setzt man ferner*

$$z_k = \varphi_k(r_1, \ldots, r_m), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wobei $\varphi_k(r_1, \ldots, r_m)$ *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_m)$ *analytisch ist und dort den Wert* a_k *annimmt, so ist* w*, als Funktion von* $(r_1, \ldots, r_m)$ *betrachtet, auch im Punkte* $(b_1, \ldots, b_m)$ *analytisch. Im übrigen ist*

$$\frac{\partial w}{\partial r_l} = \frac{\partial w}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial r_l} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial r_l}, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

1) Was die Disposition des Stoffes anbelangt, so empfiehlt es sich, an dieser Stelle bloß die Cauchysche Integralformel für den soeben vermerkten beschränkten Fall heranzuziehen, um daraus die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen aller Ordnungen zu entnehmen. Hierzu genügt es, bloß die erste halbe Seite von § 10 hier vorauszuschicken.

In der Tat ist $$\frac{\partial w}{\partial z_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

Setzt man ferner $$r_l = \xi_l + i\eta_l,$$

so wird $$\frac{\partial z_k}{\partial r_l} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} + i\frac{\partial y_k}{\partial \xi_l}.$$

Auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erkennt man nun, daß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} + i\frac{\partial y_k}{\partial \xi_l}\right) = \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \xi_l} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \xi_l}\right),$$

und damit ist die zu beweisende Relation auf den entsprechenden Satz der Differentialrechnung zurückgeführt.

Die Besprechung von Sätzen betreffend höhere Ableitungen findet in § 11 statt.

Das *Differential* wird, wie folgt, definiert. Sei

$$w = f(z_1, \ldots, z_n)$$

in einem Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch, und man erteile z_k einen Zuwachs Δz_k, $k = 1, \ldots, n$. Dann soll das Differential der Funktion im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ durch die Gleichung erklärt werden:

$$\text{(A)} \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial z_1}\Delta z_1 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial z_n}\Delta z_n,$$

wobei jede Ableitung für den genannten Punkt gebildet wird.

Das Differential dw unterscheidet sich vom Zuwachs

$$\Delta w = f(z_1 + \Delta z_1, \ldots, z_n + \Delta z_n) - f(z_1, \ldots, z_n),$$

wobei noch immer $(z) = (a)$ zu nehmen ist und außerdem

$$(z_1 + \Delta z_1, \ldots, z_n + \Delta z_n)$$

in T liegt, durch eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung:

$$\Delta w - dw = \zeta_1 \Delta z_1 + \cdots + \zeta_n \Delta z_n, \qquad \lim_{(\Delta z) = (0)} \zeta_k = 0.$$

Aus (A) folgt, indem man $w = z_k$ setzt, daß

$$\text{(B)} \qquad dz_k = \Delta z_k, \qquad k = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(C)} \qquad dw = \frac{\partial w}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial z_n} dz_n.$$

Bisher waren $z_1, \ldots, z_n$ die unabhängigen Variabelen. Werden letztere nun durch andere, etwa durch $r_1, \ldots, r_m$ ersetzt, wie im

vorhergehenden Satze, so ergibt sich auf Grund dieses Satzes, daß die Relation (C) ihre Gültigkeit noch beibehält. *Die Relation* (C) *ist richtig, was auch immer die unabhängigen Variabelen sein mögen.* Es sei noch hervorgehoben, a) daß es der Definition gemäß nur Differentiale von Funktionen oder unabhängigen Variabelen gibt[1]); b) daß das Differential eine Funktion von $2n$ Argumenten ist, nämlich von den n Argumenten der vorgelegten Funktion und den n Zuwächsen.

Die allgemeinen Formeln der Differentialrechnung:

$$\text{(I)} \qquad d(cw) = c\,dw;$$

$$\text{(II)} \qquad d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2;$$

$$\text{(III)} \qquad d(w_1 w_2) = w_1 dw_2 + w_2 dw_1;$$

$$\text{(IV)} \qquad d\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2},$$

behalten auch hier unter den üblichen Voraussetzungen ihr Gültigkeit bei.

Aus diesen Sätzen geht hervor, daß die rationalen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich in jedem Punkte, in welchem sie definiert sind, analytisch verhalten. Dasselbe gilt auch für alle Funktionen, welche aus den elementaren Funktionen zusammengesetzt sind, wie z. B.

$$w = (az_1 + bz_2)e^{-z_3}, \qquad \log(z_1^2 + z_2^2), \qquad \text{usw.}$$

Ein Mittelwertsatz.[2]) *Sei* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *eine in den Punkten*

$$(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_n), \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

analytische Funktion der n *Argumente* $z_1, \ldots, z_n$, *wobei die reelle Variabele* t, *unabhängig von den Größen* a_k, h_k, *das Intervall* (0, 1) *durchläuft. Dann ist*

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k \int_0^1 f_k(a_1+th_1, \ldots, a_n+th_n)\,dt.$$

In der Tat ist

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k f_k(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_n),$$

---

1) Hierüber vergleiche man indessen eine Bemerkung des Verfassers in seinem *Advanced Calculus*, S. 119.

2) Weierstraß, *Berliner Monatsberichte*, 1876, S. 687, *Werke*, 2, S. 64.

woraus sich denn die betreffende Relation durch Integration sofort ergibt.

Satz. *Sei* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *im Innern eines abgeschlossenen Bereiches* T *analytisch und am Rande desselben stetig. Dann nimmt* $|f(z_1, \ldots, z_n)|$ *seinen größten Wert am Rande von* T *an.*

Sei G der größte Wert von $|f(z_1, \ldots, z_n)|$. Würde nun dieser Wert in einem inneren Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ von T erreicht:

$$|f(a_1, \ldots, a_n)| = G,$$

so müßte auch der absolute Betrag der im Punkte $z_1 = a_1$ analytischen Funktion $f(z_1, a_2, \ldots, a_n)$ der einen Veränderlichen z_1 im Punkte $z_1 = a_1$ ein Maximum haben. Nach dem 3. Satze (I, 13 § 3) und der darauf folgenden 2. Aufgabe[1]) erweist sich f somit als eine Konstante in bezug auf z_1, und mithin auch in bezug auf sämtliche Argumente in der Nähe der Stelle (a).

Von hier ab verläuft der Beweis gerade so, wie der Beweis des Lehrsatzes von Bd. I, Kap. 7, § 7, S. 334.

Der Liouvillesche Satz. *Ist die Funktion* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *in jedem Punkte* $(z_1, \ldots, z_n)$ *analytisch und bleibt* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *außerdem endlich, so ist diese Funktion eine Konstante.*

Seien $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ zwei beliebige Punkte. Dann genügt es zu zeigen, daß

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Aus dem Liouvilleschen Satze für Funktionen einer Variabelen (I, 7 § 5, 3. Satz) folgt, daß

$$f(z_1, b_2, \ldots, b_n)$$

für alle Werte von z_1 den gleichen Wert beibehält. Daher ist insbesondere

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(a_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Wir bilden nun die Funktion

$$f(a_1, z_2, b_3, \ldots, b_n)$$

1) Es ist indessen nicht nötig, auf die Entwicklungen der Potentialtheorie Bezug zu nehmen, denn der Zusatz von Bd. I, S. 315 läßt sich mit Leichtigkeit dahin erweitern, daß die Gleichung $|f(z_0)| = M$ nur dann gelten kann, wenn $f(z)$ im ganzen Kreise konstant ist: $f(z) = Me^{\alpha i}$.

und schließen in gleicher Weise, daß

$$f(a_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = f(a_1, a_2, b_3, \ldots, b_n).$$

Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man schließlich zu der in Aussicht genommenen Gleichung.

§ 6. Implizite Funktionen.

1. Satz. *Sei $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ analytisch, und sei ferner*

$$F(b, a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

$$F'(b, a_1, \ldots, a_n) \neq 0, \quad \textit{wo} \quad F' = \frac{\partial F}{\partial w}.$$

Dann existiert eine im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytische Funktion

$$(1) \qquad w = \varphi(z_1, \ldots, z_n), \qquad b = \varphi(a_1, \ldots, a_n),$$

welche, in F eingetragen, diese Funktion identisch zum Verschwinden bringt und somit die Gleichung

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = 0$$

in der Nähe der Stelle $(b, a_1, \ldots, a_n)$ auflöst.

Des weiteren gibt es zwei positive Zahlen g, h derart,

a) *daß $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ sich im Bereiche*

$$T: \qquad |w - b| < h, \qquad |z_k - a_k| < g, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält;

b) *daß $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ sich im Bereiche*

$$\mathfrak{T}: \qquad |z_k - a_k| < g, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

ebenfalls analytisch verhält und außerdem

$$|b - \varphi(z_1, \ldots, z_n)| < h$$

bleibt, wenn der Punkt (z) beliebig in $\mathfrak{T}$ angenommen wird;

c) *daß die Gesamtheit der in T gelegenen Nullstellen von F sich mit den Punkten der Menge $(w, z_1, \ldots, z_n)$ deckt, wobei $(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{T}$ beliebig gewählt und w dann aus* (1) *berechnet wird.*

Der früher im Falle eines Polynoms durchgeführte Beweis, Bd. I, S. 64, behält seine Gültigkeit auch für den allgemeinen

Fall. Die Ableitungen von φ werden aus F nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung berechnet.

2. Satz. *Jede der Funktionen*

$$F_l(w_1, \ldots, w_p; z_1, \ldots, z_n), \qquad l = 1, \ldots, p,$$

sei analytisch im Punkte $(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_n)$ *und verschwinde dort:*

$$F_l(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_n) = 0; \qquad l = 1, \ldots, p,$$

während die Jacobische Determinante

$$J = \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial w_1} \cdots \frac{\partial F_p}{\partial w_p}$$

dort nicht verschwindet. Dann existieren p *im Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$ *analytische Funktionen*

$$(1') \qquad w_i = \varphi_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad b_i = \varphi_i(a_1, \ldots, a_n), \qquad i = 1, \ldots, p,$$

welche, in F_l, $l = 1, \ldots, p$, *eingetragen, diese Funktionen identisch zum Verschwinden bringen und somit das Gleichungssystem*

$$F_l(w_1, \ldots, w_p; z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad l = 1, \ldots, p,$$

in der Nähe der Stelle $(b_1, \ldots, b_p; a_1, \ldots, a_n)$ *gleichzeitig auflösen.*

Des weiteren gibt es zwei positive Zahlen g, h *derart,*

a) *daß* $F_l(w_1, \ldots, w_p; z_1, \ldots, z_n)$ *sich im Bereiche*

$$T: \qquad |w_i - b_i| < h, \qquad |z_j - a_j| < g, \qquad i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält;

b) *daß* $\varphi_i(z_1, \ldots, z_n)$, $i = 1, \ldots, p$, *sich im Bereiche*

$$\mathfrak{T}: \qquad |z_j - a_j| < g, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

ebenfalls analytisch verhält und außerdem

$$|b_i - \varphi_i(z_1, \ldots, z_n)| < h, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

bleibt, wenn der Punkt (z) *beliebig in* $\mathfrak{T}$ *angenommen wird;*

c) *daß die Gesamtheit der in* T *gelegenen gleichzeitigen Nullstellen von* F_l, $l = 1, \ldots, p$, *sich mit den Punkten der Menge* $\{(w_1, \ldots, w_p; z_1, \ldots, z_n)\}$ *deckt, wobei* $(z_1, \ldots, z_n)$ *beliebig in* $\mathfrak{T}$ *gewählt und* $w_1, \ldots, w_p$ *dann aus den Gleichungen* (1') *berechnet werden.*

Der Beweis wird gerade so geführt, wie im Falle reeller Funktionen; Bd. I, S. 70. Der Fall eines verschwindenden J wird in einem späteren Kapitel untersucht.

§ 7. Über die Umkehrung eines Funktionensystems.

Satz. *Sei* $\Phi_l(u_1, \ldots, u_p)$, $l = 1, \ldots, p$, *eine im Punkte* $(b_1, \ldots, b_p)$ *analytische Funktion der Argumente* $u_1, \ldots, u_p$, *und sei*

$$a_l = \Phi_l(b_1, \ldots, b_p), \qquad l = 1, \ldots, p.$$

Sei ferner die Jacobische Determinante

$$J = \sum \pm \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \Phi_p}{\partial u_p}$$

im Punkte $(b_1, \ldots, b_p)$ *von Null verschieden. Dann wird die vollständige Auflösung des Gleichungssystems*

$$x_l = \Phi_l(u_1, \ldots, u_p), \qquad l = 1, \ldots, p,$$

wo $(x_1, \ldots, x_p)$ *ein beliebiger Punkt einer geeigneten Umgebung der Stelle* $(a_1, \ldots, a_p)$ *ist und* $(u_1, \ldots, u_p)$ *nicht außerhalb einer Umgebung der Stelle* $(b_1, \ldots, b_p)$ *liegen darf, durch ein Gleichungssystem von der Form gegeben:*

$$u_l = \varphi_l(x_1, \ldots, x_p), \qquad l = 1, \ldots, p,$$

wobei φ_l *eine im Punkte* $(x) = (a)$ *analytische, den Wert* b_l *dort annehmende Funktion von* (x) *bedeutet.*

Im übrigen ist die Jacobische Determinante j *der Funktionen* φ_l *ebenfalls von Null verschieden, und zwar ist*

$$j = \frac{1}{J}.$$

Der Beweis gestaltet sich wie im reellen Falle; Bd. I, S. 73. Auf den Fall, daß J verschwindet, und zwar sowohl identisch als auch nicht identisch, werden wir an einer späteren Stelle genau eingehen.

Die Funktionen Φ_l können außer von $u_1, \ldots, u_p$, noch von m Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ abhängen. *Ist dann* $\Phi_l(u_1, \ldots, u_p; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *an der Stelle* $(b_1, \ldots, b_p; \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ *analytisch in allen* $p + m$ *Veränderlichen und verschwindet* J *dort nicht, so läßt sich das Gleichungssystem*

$$x_l = \Phi_l(u_1, \ldots, u_p; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \qquad l = 1, \ldots, p,$$

wo $(x_1, \ldots, x_p)$ *in der Nähe von* $(a_1, \ldots, a_p)$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *in der Nähe von* $(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$, *und* $(u_1, \ldots, u_p)$ *nicht außerhalb einer*

entsprechenden Umgebung von $(b_1, \ldots, b_p)$ *liegt, in der Form auflösen:*

$$u_l = \varphi_l(x_1, \ldots, x_p;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \qquad l = 1, \ldots, p,$$

wobei sich φ_l *im Punkte* $(a_1, \ldots, a_p;\, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ *analytisch verhält und dort den Wert* b_l *annimmt.*

§ 8. Einige allgemeine Sätze.

Die Sätze dieses Paragraphen sind nur unmittelbare Verallgemeinerungen der letzten Sätze von (I, 7, S. 319—324). Darum dürfte es wohl den meisten Lesern bequemer sein, dieselben aus jenen früheren Sätzen ohne weiteres für sich abzulesen. Wir müssen aber die allgemeineren Formulierungen explizite aussprechen, damit wir später darauf Bezug nehmen können.

1. Satz. Weierstraßscher Reihensatz. *Sei*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = u_1(z_1, \ldots, z_n) + u_2(z_1, \ldots, z_n) + \cdots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen, deren alle sich in einem $2n$*-dimensionalen Bereiche* T *analytisch verhalten. Konvergiert sie dann in jedem abgeschlossenen innerhalb* T *gelegenen Bereiche* S *gleichmäßig, so stellt sie eine in* T *analytische Funktion vor.*

Des weiteren läßt sich die Reihe gliedweise differentiieren:

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial}{\partial z_k} u_1(z_1, \ldots, z_n) + \frac{\partial}{\partial z_k} u_2(z_1, \ldots, z_n) + \cdots$$

Diese letztere Reihe konvergiert ebenfalls gleichmäßig in jedem der genannten Gebiete, und die vorgelegte Reihe gestattet somit unbegrenzt die gliedweise Differentiation.

Auch die andere Formulierung des früheren Satzes (I, 7, S. 320) kann zufolge des Satzes von S. 9 auf den Fall mehrerer Argumente übertragen werden. Der 6. Satz, Bd. I, S. 321, lautet hier, wie folgt:

2. Satz. *Allgemeiner sei* $s(z_1, \ldots, z_n;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *für unendlich viele Punkte* $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *eine in einem Bereiche* T *analytische Funktion der komplexen Argumente* $z_1, \ldots, z_n$. *Beim Grenzübergange* $\lim\, (\alpha) = (\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m)$ *möge ferner* $s(z_1, \ldots, z_n;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *einem limes zustreben:*

$$\lim_{(\alpha) = (\bar{\alpha})} s(z_1, \ldots, z_n;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = f(z_1, \ldots, z_n),$$

und zwar so, daß die Konvergenz in jedem abgeschlossenen innerhalb T gelegenen Bereiche S eine gleichmäßige ist. Dann verhält sich $f(z_1, \ldots, z_n)$ in T analytisch.

Des weiteren ist

$$\int_{\Gamma_1} dz_1 \int_{\Gamma_2} dz_2 \ldots \int_{\Gamma_k} f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_k$$

$$= \lim_{(\alpha)=(\bar{\alpha})} \int_{\Gamma_1} dz_1 \int_{\Gamma_2} dz_2 \ldots \int_{\Gamma_k} s(z_1, \ldots, z_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, dz_k, \qquad k \leqq n,$$

wobei Γ_i, $i = 1, \ldots, k$, eine reguläre Kurve der z_i-Ebene und $z_j = c_j$ (konst.), *$j = k+1, \ldots, n$, ist, vorausgesetzt nur, daß jeder Punkt $(z_1, \ldots, z_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$, unter z_i einen beliebigen Punkt von Γ_i verstanden, ein innerer Punkt von T ist.*

Endlich ist
$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \lim_{(\alpha)=(\bar{\alpha})} \frac{\partial s}{\partial z_k},$$

wobei die Funktion $s_{z_k}(z_1, \ldots, z_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ebenfalls in jedem der genannten Bereiche S gleichmäßig konvergiert; mithin ist auch allgemein

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \cdots + \mu_n} f}{\partial z_1^{\mu_1} \ldots \partial z_n^{\mu_n}} = \lim_{(\alpha)=(\bar{\alpha})} \frac{\partial^{\mu_1 + \cdots + \mu_n} s}{\partial z_1^{\mu_1} \ldots \partial z_n^{\mu_n}}.$$

Wir wenden uns jetzt zum 7. Satz, Bd. I, S. 322.

3. Satz. *Sei $f(t_1, \ldots, t_m; z_1, \ldots, z_n)$ eine stetige Funktion der $m+n$ Argumente, wobei t_k, $k = 1, \ldots, m$, ein beliebiger Punkt einer regulären Kurve C_k der t_k-Ebene und $(z_1, \ldots, z_n)$ ein beliebiger Punkt eines $2n$-dimensionalen Bereiches T ist. Erteilt man t_k, $k = 1, \ldots, m$, einen willkürlichen Wert auf C_k, so soll sich $f(t_1, \ldots, t_m; z_1, \ldots, z_n)$ fernerhin, als Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ betrachtet, in T analytisch verhalten. Dann definiert das Integral*

$$\int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 \ldots \int_{C_m} f(t_1, \ldots, t_m; z_1, \ldots, z_n)\, dt_m$$

eine in T analytische Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$. Im übrigen ist

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} = \int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 \ldots \int_{C_m} \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}\, dt_m.$$

Der fortgelassene zweite Teil jenes früheren Satzes entspricht hier dem zweiten Teile des 2. Satzes und läßt sich demgemäß sofort ablesen.

4. Satz. *Genügt $f(t_1, \ldots, t_m; z_1, \ldots, z_n)$ denselben Bedingungen wie im 3. Satze, so wird auch die Funktion*

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}$$

diese Bedingungen erfüllen.

Die in den beiden Aufgaben, Bd. I, S. 324, enthaltenen Sätze gestatten ebenfalls die naheliegenden Verallgemeinerungen.

Zum Beweise dieser Sätze wird man am bequemsten alle Argumente z_k bis auf eins festhalten und die früheren Sätze dann auf letztere Funktion anwenden. Daß jene Sätze für den Fall mehrerer Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gelten, erhellt ja sofort. Im übrigen dürfen die vorstehenden iterierten Integrale durch mehrdimensionale über Flächen bzw. Hyperflächen hin erstreckte Integrale ersetzt werden.

§ 9. Zylinderbereiche.

Eine besondere Klasse von Bereichen, welche in der Praxis gute Dienste leisten, ist folgende. Sei T_k ein Bereich der z_k-Ebene $k = 1, \ldots, n$, und sei $z_k = x_k + i y_k$ ein beliebiger Punkt von T_k. Dann bilden die entsprechenden Punkte $(x_1, y_1, x_2, \ldots, y_n)$ einen $2n$-dimensionalen Bereich, welchen wir als einen *Zylinderbereich* benennen und häufig durch das Symbol $(T_1, \ldots, T_n)$, oder kürzer noch durch (T) bezeichnen wollen.

Schon im einfachsten Falle, wo $n > 1$ ist, entzieht sich ein solcher Bereich der Anschauung, da er im vierdimensionalen Raume liegt. Immerhin hilft es etwas, wenn man sich analoge Bereiche im Raume von zwei und drei Dimensionen vorstellt, und zwar sind das folgende:

a) In der analytischen Geometrie geht man zunächst von eigentlichen Punkten mit reellen Koordinaten, (x, y), aus und fügt dann noch ideale Punkte hinzu, deren Koordinaten komplexe Zahlen sind. Trotzdem behält man mit Vorteil die Sprechweise des reellen Falles noch bei, indem man etwa von „Kurven", vom „Schnittpunkt zweier Kurven" usw. redet.

In ähnlicher Weise kann man auch hier vorgehen. Das Wesentliche an einem Bereiche (T_1, T_2) — um beim einfachsten Falle zu verbleiben — besteht eben darin, daß z_1 in einem vorgegebenen festen Bereiche T_1 willkürlich angenommen, und dann

z_2, *unabhängig von der Wahl von* z_1, in einem zweiten vorgegebenen festen Bereiche T_2 beliebig gewählt wird.

Das Analogon des Bereiches T_1 im eindimensionalen reellen Raume ist ja eine Strecke der x-Achse. Entsprechendes gilt auch für T_2, und so wird man denn in der Ebene der analytischen Geometrie zu einem *Rechteck*

$$a' < x < a'', \qquad b' < y < b'',$$

geführt. Ist $n = 3$, so stellt sich ein *Parallelepipedon* ein.

Ein wesentlicher Mangel dieser Vorstellung besteht in den Zusammenhangsverhältnissen. Unter einem Bereiche T von *linearem Zusammenhange* verstehen wir folgendes. Sei C eine beliebige ganz innerhalb T gelegene einfache geschlossene Kurve. Dann soll es möglich sein, C auf einen inneren Punkt von T stetig zu deformieren, ohne daß C dabei durch einen Randpunkt von T hindurchgeht.[1]) Einen solchen Bereich werden wir auch schlechtweg als einen *einfach zusammenhängenden* bezeichnen, sofern, späteren Definitionen gegenüber, kein Mißverständnis zu befürchten ist.

Wie man sieht, hängt ein Rechteck oder ein Parallelepipedon einfach zusammen, und dasselbe gilt auch von einem Bereiche $(T_1, \ldots, T_n)$, sofern jedes T_k einfach zusammenhängt. Ist letzteres hingegen nicht der Fall, so weist (T) *mehrfachen Zusammenhang* auf.

b) Um dem soeben besprochenen Mangel vorzubeugen, können wir uns, wie folgt, behelfen. Sei T_1, wie bisher, ein Bereich der $z_1 = x_1 + i y_1$-Ebene. Anstatt aber den Bereich T_2 zu betrachten, lassen wir eine Strecke $a' < \xi < a''$ an Stelle dessen treten. Die Tripel (x_1, y_1, ξ) können dann als Punkte eines Zylindersegments gedeutet werden, welches durch zwei auf den Erzeugenden senkrecht stehende Ebenen begrenzt wird.

Dieses geometrische Bild hat den Vorteil, daß der neue Bereich nicht mehr einfach zusammenhängt, wenn das gleiche nicht schon von T_1 gilt. Hinsichtlich dieser Vorstellung haben wir die Bezeichnung *Zylinderbereich* gewählt.

Ist jeder der Bereiche T_k regulär (I, 2 § 2), so heißt $(T_1, \ldots, T_n)$ ein *regulärer* Zylinderbereich. Ist außerdem jeder Bereich T_k ein Kreis, so heißt $(T_1, \ldots, T_n)$ ein *Kreiszylinderbereich.*

---

1) Die Arithmetisierung dieser Vorstellung müssen wir wohl dem Leser überlassen.

Satz. *Sei* $(T) = (T_1, \ldots, T_n)$ *ein Zylinderbereich, und sei* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *im Innern von* (T) *analytisch und am Rande von* (T) *stetig. Dann verhält sich die Funktion*

$$w = F(z_1, \ldots, z_m, t_{m+1}, \ldots, t_n), \tag{1}$$

wo t_k, $(k = m + 1, \ldots, n)$, *einen festen Randpunkt von* T_k *bedeutet, im Innern des Bereiches* $(T') = (T_1, \ldots, T_m)$ *analytisch.*

Sei $(a_1, \ldots, a_m)$ ein innerer Punkt von (T') und sei τ eine ganz innerhalb (T') belegene Umgebung dieses Punktes. Ist nun $(a_1, \ldots, a_m, \zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n)$ ein innerer Punkt von (T), so wird sich

$$F(z_1, \ldots, z_m, \zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n), \tag{2}$$

als Funktion von $(z_1, \ldots, z_m)$ allein betrachtet, in τ analytisch verhalten. Läßt man nun den Punkt $(\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n)$, stets im Innern des Bereiches $(T_{m+1}, \ldots, T_n)$ verbleibend, dem Punkte $(t_{m+1}, \ldots, t_n)$ zustreben, während $(z_1, \ldots, z_m)$ beliebig in τ gewählt wird, so konvergiert die Funktion (2) wegen der Stetigkeit von $F(z_1, \ldots, z_n)$ in (T) gleichmäßig gegen den Grenzwert (1). Dem zweiten Satze von § 8 zufolge verhält sich dann die Grenzfunktion (1) in τ analytisch, woraus man denn die Richtigkeit des Satzes erkennt.

Aufgabe. Man zeige, daß der Rand eines Zylinderbereiches aus einem Stücke besteht.

§ 10. Die Cauchysche Integralformel.

Sei $(T) = (T_1, T_2)$ ein regulärer Zylinderbereich, und sei ferner $f(z_1, z_2)$ im Innern von (T) analytisch und am Rande desselben stetig. Dann läßt f im Innern von (T) folgende Integraldarstellung zu. Sei t_k ein Punkt des Randes C_k von T_k, $k = 1, 2$. Ist nun z_k ein innerer Punkt von T_k, so ergibt die Cauchysche Integralformel zunächst die Darstellung

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{f(t_1, z_2)}{t_1 - z_1}\, dt_1 .$$

Nach dem letzten Satze des vorhergehenden Paragraphen[1]) ist

1) Setzt man voraus, daß der Bereich (T) in einem Gebiete liegt, worin F analytisch ist; m. a. W., daß F sich auch in den Randpunkten von (T)

aber $f(t_1, z_2)$, als Funktion von z_2 aufgefaßt, analytisch in T_2. Da diese Funktion außerdem stetig am Rande ist, so ist

$$f(t_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(t_1, t_2)}{t_2 - z_2}\, dt_2 .$$

Demnach ist für jeden inneren Punkt von (T)

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int_{C_2} \frac{f(t_1, t_2)}{t_2 - z_2}\, dt_2 .$$

Formel und Beweis gelten beide für ein beliebiges n. Dies ist die *Cauchysche Integralformel*[1]):

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \cdots \int_{C_n} \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{t_n - z_n}\, dt_n .$$

Entgegen dem Falle $n = 1$ ist hier die Kenntnis sämtlicher Randwerte zur Darstellung der Funktion nicht nötig. Vielmehr genügt die Angabe der Funktionswerte längs einer gewissen geschlossenen n-fach ausgedehnten, am $(2n-1)$-dimensionalen Rande von (T) gelegenen Mannigfaltigkeit.

Diese Mannigfaltigkeit teilt den $2n$-dimensionalen Raum nicht mehr in zwei Stücke, sobald $n > 1$ ist. Wir haben sie uns nach Analogie einer Raumkurve im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume zu denken. Sie schlingt sich um gewisse $(2n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten herum, und zwar sind das folgende:

$$t_k - z_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wobei z_k als unveränderlich, $t_1, \ldots, t_n$ als die laufenden Koordinaten anzusehen sind; und sie läßt sich nicht auf einen inneren Punkt von (T) stetig zusammenziehen, ohne dabei mit diesen Mannigfaltigkeiten zu kollidieren.

Über gewisse Verallgemeinerungen dieses Begriffs wird im *Madison Colloquium*, S. 135, § 2 berichtet; vgl. unten S. 45, Anm. 1.

---

analytisch verhält, so hat man diesen Satz nicht nötig. Die bewußte Eigenschaft ergibt sich dann unmittelbar aus den Hypothesen des Satzes.

1) Turiner Abhandlung vom Jahre 1831. — *Exercices d'analyse* 2 (1841), p. 55, woselbst der Beweis des 2. Theorems erkennen läßt, das Cauchy diese Verallgemeinerung der Integralformel als unmittelbar evident erachtete.

§ 11. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

Aus der Cauchyschen Integralformel ergibt sich sofort die Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen der Funktion, sowohl nach z_k als auch nach x_k und y_k, und zwar verhalten sich dieselben sämtlich analytisch.

Die Formel (1) von Bd. I, S. 314 nimmt hier für den Fall $n = 2$ folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial z_1^k \partial z_2^l} = \frac{k!\, l!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C_1} \frac{d t_1}{(t_1 - z_1)^{k+1}} \int\limits_{C_2} \frac{f(t_1, t_2)\, d t_2}{(t_2 - z_2)^{l+1}}. \tag{1}$$

Der Satz der Differentialrechnung betreffend die Umkehrung der Reihenfolge zweier Differentiationen behält auch für analytische Funktionen komplexer Argumente seine Gültigkeit bei.

Cauchys Abschätzung. Sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Innern des Kreiszylinderbereiches $(T) = (T_1, \ldots, T_n)$,

$$T_k: \qquad | z_k - a_k | < r_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

analytisch und am Rande von (T) stetig. Bezeichnet man mit M den größten Wert von $|f|$ am Rande, so ist

$$\left| \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right|_{(z)=(a)} \leqq \frac{k_1! \ldots k_n!}{r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}} M. \tag{2}$$

Daß
$$| f(a_1, \ldots, a_n) | \leqq M$$
ist, sowie daß überhaupt für jeden Punkt (z) von (T)
$$| f(z_1, \ldots, z_n) | \leqq M$$
ist, subsumiert sich ja unter den allgemeinen Satz von § 5, S. 11. Gilt das Gleichheitszeichen für einen Punkt $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ von (T), wobei nur für einen bestimmten Wert von k $| \zeta_k | < r_k$ ist, so hängt $f(z_1, \ldots, z_n)$ von z_k nicht ab.

Wie man sieht, befindet sich jeder der Randpunkte, in welchem die Funktion $|f|$ ihren größten Wert annimmt, unter den Punkten der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\{(t_1, \ldots, t_n)\}$, $|t_k| = r_k$, $k = 1, \ldots, n$, sofern $f(z_1, \ldots, z_n)$ von allen n Argumenten wirklich abhängt. In jedem anderen Falle befindet sich jedoch mindestens ein Punkt, in welchem $|f|$ den größten Wert erreicht, unter der genannten Menge.

Die reellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sei

$$w = u + vi = f(z_1, \ldots, z_n), \qquad z_k = x_k + iy_k,$$

eine in einem Bereiche T analytische Funktion. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, hier $2n$ an der Zahl,

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

ergibt sich dann sofort, daß

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_l} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial y_k} = 0$$

ist, wobei k, l unabhängig voneinander die Werte $1, \ldots, n$ durchlaufen.[1]) Man erhält so im ganzen n^2 lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen der reelle Teil u der Funktion genügen muß. Für den Fall $n = 2$ sind es folgende:

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} &= 0. \end{aligned} \right.$$

1. Satz. *Sind umgekehrt u, v zwei simultane Lösungen*[2]) *des Systems von Differentialgleichungen* (3), *welche in T eindeutige Funktionen sind, so wird $u + iv$ eine in T analytische Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ sein.*

Wir fügen noch den weiteren Satz hinzu:

2. Satz. *Genügt u dem System von Differentialgleichungen* (A), *und hängt T außerdem linear einfach zusammen, so gibt es noch eine zweite Funktion v derart, daß $u + vi$ sich in T analytisch verhält, und zwar ist diese Funktion bis auf eine additive rein imaginäre Konstante völlig bestimmt.*

Zum Beweise bilde man das Kurvenintegral

$$v = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \sum_{k=1}^{n} -\frac{\partial u}{\partial y_k} dx_k + \frac{\partial u}{\partial x_k} dy_k,$$

---

1) Poincaré, *Comptes rendus* 96 (1883), p. 238; *Acta Mathematica* 2 (1883), p. 99; ibid. 22 (1898), p. 112.

2) Unter einer *Lösung* des Gleichungssystems (3) verstehen wir zwei Funktionen u, v, welche nebst den in Betracht kommenden Ableitungen stetig sind und den vorgelegten Differentialgleichungen genügen. — Eine ähnliche Erklärung gilt auch für (A).

erstreckt vom festen Punkte $(a_1, b_1, a_2, \ldots, b_n)$ bis zum veränderlichen Punkte $(x_1, y_1, x_2, \ldots, y_n)$. Dasselbe ist vom Typus

$$\int_{(a)}^{(x)} P_1 dx_1 + \cdots + P_m dx_m.$$

Damit dieses in einem linear einfach zusammenhängenden Bereiche vom Wege unabhängig sei, ist unter Voraussetzung der Stetigkeit der P_k nebst der ihrer Ableitungen erster Ordnung notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_l} = \frac{\partial P_l}{\partial x_k}$$

sei. Im vorliegenden Falle decken sich diese Bedingungen geradezu mit den Gleichungen (A).[1])

Unter einer *harmonischen* Funktion von m reellen Variabelen $x_1, \ldots, x_m$ versteht man eine reelle Lösung der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0.$$

Wie man sieht, ist der reelle Teil einer analytischen Funktion mehrerer komplexen Variabelen, $z_k = x_k + i y_k$, $(k = 1, \ldots, n)$ eine harmonische Funktion der $2n$ reellen Variabelen $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_n$. Das Umgekehrte trifft indessen im allgemeinen nicht zu. Soll eine harmonische Funktion u von $x_1, \ldots, y_n$ der reelle Teil einer analytischen Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ sein, so müssen noch die Differentialgleichungen (A) erfüllt sein. Die Funktion heißt dann *biharmonisch*.[2])

Eine äquivalente komplexe Form. Poincaré hat a. a. O. den Differentialgleichungen (A) noch eine andere Form erteilt, indem er an Stelle der Argumente x_k, y_k neue Variabelen z_k, ζ_k vermöge folgender Gleichungen einführt:

$$z_k = x_k + i y_k, \qquad \zeta_k = x_k - i y_k.$$

Es folgt nämlich aus der Cauchyschen Integralformel, wie sogleich nachgewiesen werden soll, daß u analytisch von den $2n$ Argumenten $x_1, \ldots, y_n$ abhängt, so daß also die komplexe Transformation gestattet ist.

---

1) Zum Beweise dieses Satzes läßt sich die Methode von (I, S. 148/9) unmittelbar verallgemeinern.

2) Poincaré, *Acta Mathematica* 22 (1898), S. 112.

Hierdurch geht das System (A) in folgendes System von n^2 Gleichungen über:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \zeta_l} = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, n.$$

Die Funktion u hat mithin notwendig die Form[1])

$$u = \varphi(z_1, \ldots, z_n) + \psi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

oder auch

$$u = \varphi(x_1 + i y_1, \ldots, x_n + i y_n) + \psi(x_1 - i y_1, \ldots, x_n - i y_n),$$

wo φ und ψ von ihren Argumenten analytisch abhängen. Dabei wird außerdem die Summe $\varphi + \psi$ reell, wenn x_k, y_k reelle Werte annehmen.

Der ausstehende Nachweis wird so geführt. Sei $w = f(z)$ im Kreise $|z| < r$ analytisch und am Rande desselben stetig. Dann ergibt die Cauchysche Integralformel,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{t - z},$$

indem man

$$t = r e^{\theta i}, \qquad f(t)\, r e^{\theta i} = U + V i$$

setzt, daß

$$u + v i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(U + V i)\, d\theta}{r \cos\theta - x + i(r \sin\theta - y)},$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos\theta - x) U + (r \sin\theta - y) V}{r^2 - 2r(x\cos\theta + y \sin\theta) + x^2 + y^2}\, d\theta$$

ist. Letzteres Integral stellt jedoch nach § 8, 3. Satz eine analytische Funktion der beiden unabhängigen komplexen Variabelen

---

1) Beweis etwa durch Verallgemeinerung der evidenten Formel:

$$f(z_1, z_2) - f(a_1, a_2) = \int_{a_1}^{z_1} f_1(\xi_1, a_2)\, d\xi_1 + \int_{a_2}^{z_2} f_2(z_1, \xi_2)\, d\xi_2,$$

unter Berücksichtigung des Umstandes daß $\partial u / \partial z_k$ nicht von $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, und ebenso $\partial u / \partial \zeta_k$ nicht von $(z_1, \ldots, z_n)$ abhängt. Auch die in § 5 benützte Darstellung der Differenz

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

führt direkt zum gewünschten Resultat. Andererseits kann man die Taylorsche Reihenentwicklung auf letztere Differenz anwenden.

x, y in der Nähe des Anfangs dar, welche für reelle Werte von x, y mit dem reellen Teil von w übereinstimmt. Daß dies auch die einzige Funktion mit diesen Eigenschaften ist, wird noch in § 12 dargetan. — Die Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer Argumente erhellt sofort.

§ 12. Das Analogon des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung.

Der Satz von Bd. I, S. 332 läßt sich, wie folgt, verallgemeinern.[1]) Wir sprechen ihn der Kürze halber bloß für den Fall $n = 2$ aus.

Satz. *Sei $f(z, w)$ in einem Zylinderbereiche $(T) = (T_1, T_2)$ analytisch und am Rande desselben stetig. Dann läßt sich $f(z, w)$ in der Form darstellen:*

$$f(z, w) = f(a, b) + f_1(a, b)(z-a) + f_2(a, b)(w-b)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} f_{n-k-1,k}(a,b)\,(z-a)^{n-k-1}\,(w-b)^k$$

$$+ P_0(z, w)(z-a)^n + P_1(z, w)(z-a)^{n-1}(w-b)$$

$$+ \cdots + P_n(z, w)(w-b)^n,$$

wobei $P_k(z, w)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, im Bereiche (T) analytisch ist.[2])

Der Beweis ergibt sich sofort, indem man die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-a} + \frac{z-a}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(s-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(s-a)^n\,(s-z)},$$

$$\frac{1}{t-w} = \frac{1}{t-b} + \frac{w-b}{(t-b)^2} + \cdots + \frac{(w-b)^{n-1}}{(t-b)^n} + \frac{(w-b)^n}{(t-b)^n\,(t-w)}$$

---

1) Die Hauptresultate dieses Paragraphen lassen sich aus der auf unabhängige Weise begründeten Cauchy-Taylorschen Reihe direkt ableiten, und da nun der Leser sich doch mit der Reihentheorie vertraut machen muß, wird er vielleicht diesen kürzeren Weg vorziehen. Die nachstehenden Entwicklungen haben indessen den Vorteil, durchaus elementaren Charakters zu sein, denn sie setzen die Reihentheorie keineswegs voraus. Es hat doch Interesse zu erkennen, wie weit man auch in der Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexen Argumente prinzipiell auf die Reihenentwicklungen verzichten kann. Damit ist aber nicht gesagt, daß man es immer tun soll.

2) Es sei noch bemerkt, daß die Funktionen P_k nicht eindeutig bestimmt sind, da man beispielsweise zum ersten Gliede des Restes die Funktion $(w-b)^n\,(z-a)^n$ hinzufügen konnte, um dieselbe nachträglich vom letzten Gliede wieder abzuziehen.

miteinander zusammenmultipliziert und den also erhaltenen Ausdruck für $(s-z)^{-1}(t-w)^{-1}$ in die Cauchysche Integralformel einsetzt.

Eine besondere Bestimmung der Funktionen $P_k(z, w)$ kann man explizite hinschreiben, indem man von der folgenden allgemeinen Formel ausgeht. Sei

$$S_n(z_1, \ldots, z_m) = \sum z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m},$$

wobei $k_1, \ldots, k_m$ unabhängig voneinander die Werte $0, 1, \ldots, n$ annehmen, doch so, daß $k_1 + \cdots + k_m \leqq n$ bleibt, und jedes Glied einmal und nur einmal auftritt. Dann erkennt man sofort, daß

$$\text{(a)} \quad S_{n-1}(z_1, \ldots, z_m) = S_{n-1}(z_1, \ldots, z_{m-1}) + z_m S_{n-2}(z_1, \ldots, z_m).$$

Sei ferner $\quad G_n(z_1, \ldots, z_m) = \sum z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m},$

wobei nun stets $k_1 + \cdots + k_m = n$ ist. Endlich sei

$$H_n(z_1, \ldots, z_m) = z_m G_{n-1}(z_1, \ldots, z_m).$$

Ersetzt man in (a) S_{n-2} durch den Wert:

$$S_{n-2}(z_1, \ldots, z_m) = S_{n-1}(z_1, \ldots, z_m) - G_{n-1}(z_1, \ldots, z_m),$$

so ergibt sich die sogleich zu benützende Relation:

$$\text{(b)} \quad S_{n-1}(z_1, \ldots, z_m)(1 - z_m) + H_n(z_1, \ldots, z_m) = S_{n-1}(z_1, \ldots, z_{m-1}).$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Formel hinzuschreiben, worauf sich die in Aussicht genommene besondere Bestimmung der Funktionen $P(z_1, \ldots, z_m)$ stützt, und zwar ist das folgende:

$$\frac{1}{(1-z_1)\ldots(1-z_m)} = S_{n-1}(z_1, \ldots, z_m) + \frac{H_n(z_1, \ldots, z_m)}{1-z_m} + \frac{H_n(z_1, \ldots, z_{m-1})}{(1-z_{m-1})(1-z_m)} + \cdots + \frac{H_n(z_1)}{(1-z_1)\ldots(1-z_m)}.$$

Der Beweis dieser Formel wird durch den Schluß von m auf $m+1$ erbracht. Für $m = 1$ ist dieselbe sicher richtig, denn sie ist dann nichts anderes als die bekannte Relation:

$$\frac{1}{1-z_1} = 1 + z_1 + \cdots + z_1^{n-1} + \frac{z_1^n}{1-z_1}.$$

Ist nun die Formel richtig, wenn $m-1$ an Stelle von m tritt, so wird sie auch für $m=m$ gelten, falls

$$\frac{S_{n-1}(z_1,\ldots,z_{m-1})}{1-z_m} = S_{n-1}(z_1,\ldots,z_m) + \frac{H_n(z_1,\ldots,z_m)}{1-z_m}$$

ist, und nach (b) trifft dies stets zu.

Für den Fall $m=2$, $z_1=x$, $z_2=y$, nimmt diese Formel die Gestalt an[1]):

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = 1+x+y+x^2+xy+y^2+\cdots$$
$$+x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1}+\frac{x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+y^n}{1-y}$$
$$+\frac{x^n}{(1-x)(1-y)}.$$

Setzt man nunmehr

$$\frac{1}{(s-z)(t-w)} = \frac{1}{(s-a)\left\{1-\dfrac{z-a}{s-a}\right\}}\cdot\frac{1}{(t-b)\left\{1-\dfrac{w-b}{t-b}\right\}},$$

$$x=\frac{z-a}{s-a},\qquad y=\frac{w-b}{t-b},$$

so ergibt sich die in Aussicht genommene Darstellung:

$$P_0(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_1} ds \int\limits_{C_2} \frac{f(s,t)\,dt}{(s-a)^n(s-z)(t-w)};$$

$$P_k(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_1} ds \int\limits_{C_2} \frac{f(s,t)\,dt}{(s-a)^{n-k+1}(t-b)^k(t-w)},\qquad 1<k<n.$$

Im Falle $m>2$ wird man als Indizes der P die Exponenten von $(z_1-a_1),\ldots,(z_m-a_m)$ nehmen. Für $m=3$ wird

$$P_{n00}(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_1} d\zeta_1 \int\limits_{C_2} d\zeta_2 \int\limits_{C_3} \frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\,d\zeta_3}{(\zeta_1-a_1)^n(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)(\zeta_3-z_3)};$$

$$P_{k_1,k_2,0}(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_1} d\zeta_1 \int\limits_{C_2} d\zeta_2 \int\limits_{C_3} \frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\,d\zeta_3}{(\zeta_1-a_1)^{k_1+1}(\zeta_2-a_2)^{k_2}(\zeta_2-z_2)(\zeta_3-z_3)};$$
$$k_1+k_2=n,\ 0<k_2;$$

$$P_{k_1,k_2,k_3}(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_1} d\zeta_1 \int\limits_{C_2} d\zeta_2 \int\limits_{C_3} \frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\,d\zeta_3}{(\zeta_1-a_1)^{k_1+1}(\zeta_2-a_2)^{k_2+1}(\zeta_3-a_3)^{k_3}(\zeta_3-z_3)},$$
$$k_1+k_2+k_3=n,\ 0<k_3.$$

---

1) Indem man x mit y vertauscht und die beiden Gleichungen zusammenaddiert, erhält man rechter Hand einen symmetrischen Ausdruck.

Abschätzung der Funktionen $P_{k_1, \ldots, k_m}(z_1, \ldots, z_m)$. Sei $(K) = (K_1, \ldots, K_m)$ ein innerhalb (T) belegener Kreiszylinderbereich, wobei K_i aus folgendem Kreise besteht:

$$K_i: \qquad |z_i - a_i| \leqq R_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

und sei ferner $\varkappa_i$ die kürzeste Entfernung eines Punktes des Kreises K_i von einem Randpunkte des Bereiches T_i. Endlich sei M der größte Wert von $|f(z_1, \ldots, z_m)|$ in (T), also am Rande von (T). Dann ist offenbar im Falle $m = 2$ unter Wiederaufnahme der früheren Bezeichnungen

$$|P_0(z, w)| \leqq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{M L_1 L_2}{(R_1 + \varkappa_1)^n \varkappa_1 \varkappa_2};$$

$$|P_k(z, w)| \leqq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{M L_1 L_2}{(R_1 + \varkappa_1)^{n-k+1} (R_2 + \varkappa_2)^k \varkappa_2}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wo L_i die Länge der Berandung von T_i bedeutet.

Hieraus ergibt sich weiter die einheitliche Abschätzung:

$$|P_k(z, w)| \leqq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{M L_1 L_2}{(R_1 + \varkappa_1)^{n-k} (R_2 + \varkappa_2)^k \varkappa_1 \varkappa_2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

In ähnlicher Weise erhält man im allgemeinen Falle die Abschätzung:

$$|P_{k_1 \ldots k_m}(z_1, \ldots, z_m)| \leqq \frac{1}{(2\pi)^m} \frac{M L_1 \ldots L_m}{(R_1 + \varkappa_1)^{k_1} \ldots (R_m + \varkappa_m)^{k_m} \varkappa_1 \ldots \varkappa_m}.$$

Lehrsatz. *Ist $f(z_1, \ldots, z_m)$ in einem Bereich T analytisch, und verschwinden sämtliche Ableitungen der Funktion in einem einzigen inneren Punkte (a) von T, so hat f im ganzen Bereiche (T) einen konstanten Wert.*

Der Beweis wird ähnlich wie im Falle $n = 1$ (I, 7 § 7, S. 334) geführt, indem man zuerst zeigt, daß $f(z_1, \ldots, z_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ in der Nähe von (a), und zwar in jedem, in T belegenen Kreiszylinderbereiche mit dem Mittelpunkte (a) identisch verschwindet.

Sei $(Z_1, \ldots, Z_m)$ ein beliebiger innerer Punkt von T, und man verbinde (a) mit (Z) durch eine reguläre innerhalb T verlaufende Kurve Γ. Jetzt fasse man alle Punkte von Γ ins Auge, in deren Umgebung obige Differenz identisch verschwindet. Sollte Γ hiermit noch nicht erschöpft sein, so ist vor allem klar, daß die Punkte (ζ) von Γ, in deren Nähe die genannte Differenz nicht identisch verschwindet, eine abgeschlossene Menge bilden. Sei (c) der erste

Punkt (ζ), der von (a) aus erreicht wird. Dann kann man offenbar in der Nähe von (c) einen Punkt (b) finden, in dessen Umgebung jene Differenz identisch verschwindet, und welcher außerdem der Mittelpunkt eines den Punkt (c) im Innern umfassenden Kreiszylinderbereiches ist. Hiermit ist man zu einem Widerspruch geführt worden, womit denn der Beweis geliefert ist.

Der Satz läßt sich auch vermöge der Taylorschen Reihe und der Eindeutigkeit der Darstellung durch dieselbe beweisen. Da nun aber dieser Satz, wie in § 15 auch betont wird, ohne Anwendung der Entwicklungen dieses Paragraphen begründet werden kann, so könnte man den obigen Lehrsatz dem § 15 einverleiben und den gegenwärtigen Paragraphen streichen.

Aus diesem Satz geht der folgende Satz unmittelbar hervor.

Identitätssatz. *Ist $f(z_1, \ldots, z_m)$ analytisch im Bereiche T und verschwindet diese Funktion identisch in einem zweidimensionalen Teile von T, so verschwindet sie überall in T.*

Sind $f(z_1, \ldots, z_m)$ und $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$ beide analytisch in einem Bereich T und stimmen ihre Werte in der Umgebung eines Punktes von T miteinander überein, so ist in jedem Punkte von T

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \varphi(z_1, \ldots, z_m).$$

Schärfere Identitätssätze lassen sich nach Art des Satzes von Bd. I, S. 353 aussprechen.

Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ in einem Punkte (a) analytisch und verschwindet f für alle in der Nähe von (a) belegenen Punkte $(a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)$, wo die x_k sämtlich reell sind, so verschwindet f identisch.

Allgemeiner sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) analytisch. In jeder z_k-Ebene sei eine abzählbare Menge $\{\zeta_k^{(j)}\}$ mit der Häufungsstelle a_k gegeben. Verschwindet dann f in jedem Punkte der abzählbaren Menge $\{(\zeta_1^{(j_1)}, \ldots, \zeta_n^{(j_n)})\}$, wobei die n Koordinaten $\zeta_k^{(j)}$ unabhängig voneinander beliebig gewählt werden, so verschwindet f identisch.

§ 13. Über mehrfach unendliche Reihen.

Definition. Sei

$$u_{m_1, \ldots, m_n} = f(m_1, \ldots, m_n)$$

eine für alle nicht-negativen ganzzahligen Werte der Argumente eindeutig erklärte Funktion. Unter einer *n-fach unendlichen Reihe*

versteht man den Ausdruck[1])

$$\text{(A)} \qquad \sum \cdots \sum u_{m_1, \ldots, m_n} \qquad \text{oder auch} \qquad \sum u_{m_1, \ldots, m_n}$$

und definiert dann die *Konvergenz*, *Divergenz* und den *Wert* der Reihe, wie folgt. Man ordne die vorgelegten Glieder $u_{m_1, \ldots, m_n}$ zu einer einfachen Reihe an, derart, daß jedes dieser Glieder einmal und nur einmal darin auftritt. Konvergiert nun jede beliebige derartige Reihe, so heißt die mehrfache Reihe *konvergent*; im anderen Falle heißt sie *divergent*.[2])

Bekanntlich besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz einer einfach unendlichen Reihe darin, daß jede durch Umordnung der Glieder derselben daraus entspringende einfache Reihe konvergiere. Hieraus erkennt man, daß eine mehrfache Reihe stets dann und nur dann konvergiert, wenn eine der derselben entsprechenden einfachen Reihen absolut konvergiert. Diese einfachen Reihen haben daher alle denselben Wert U, welchen wir nun der mehrfachen Reihe als *Wert* beilegen.

Im Falle $m = 2$ können wir dem Symbol (A) noch folgendes Schema an die Seite setzen:

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \cdots \\ u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \cdots \\ u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

---

1) In jüngster Zeit hat Hilbert [Hamburger Abhandlungen 1 (1922), S. 157], auf eine Idee von Heine [Journ. f. Math. 74 (1872), S. 176] zurückgreifend, das *Zeichen* (d. h. Federstrich, Druckkomplex etwa von Buchstaben und sonstigen Linien, wie z. B. bei den Determinanten und den Charakteren des Logikkalküls) als das eigentliche Element zugrunde gelegt, worauf die ganze Mathematik aufgebaut werden kann. In diesem Sinne besteht die Definition der mehrfachen Reihe geradezu in dem hinter (A) gedruckten Zeichen, sowie auch (falls $n = 2$) in dem als damit gleich erklärten Zeichen des unter (B) hingeschriebenen Schemas. Alles andere, was im Texte gesagt ist, dient bloß dazu, den weiteren Begriff der Konvergenz und Divergenz festzustellen. Die Reihe ist das Zeichen; ob ihr noch ein Zahlwert beigelegt wird, ist eine weitere Frage. So könnte man beispielsweise, ohne der Logik nahezutreten, die Summe und das Produkt zweier Reihen definieren, gleichviel ob dieselben konvergieren oder nicht. Der inhaltsreichste Fall ist zwar der, daß beide Reihen konvergieren, und so beschränkt man sich denn zunächst darauf lediglich aus Zweckmäßigkeitsgründen. — Im übrigen habe ich diese Erklärung der unendlichen Reihen in meinen Vorlesungen auch schon länger gebraucht.

2) Es sei noch bemerkt, daß in anderen Teilen der Mathematik, wie z. B. in der Theorie der Fourierschen Doppelreihen, andere Definitionen der mehrfachen Reihen am Platze sind.

Darunter wollen wir auch eine Doppelreihe verstehen. Ist $m > 2$, so kann man sich das entsprechende Schema im m-dimensionalen Raume konstruiert denken.

Hinfort beschränken wir uns auf den Fall $m = 2$, da sowohl die Sätze als die Beweise eine unmittelbare Übertragung auf die höheren Fälle gestatten.

Aus der Definition der Konvergenz einer Doppelreihe erkennt man sofort, daß die Reihe (B) stets dann und nur dann konvergiert, wenn die aus den absoluten Beträgen der Glieder von (B) gebildete Doppelreihe:

$$\sum\sum |u_m^{(n)}|$$

konvergiert. Ist nun

$$\sum\sum a_m^{(n)}, \qquad 0 \leqq a_m^{(n)},$$

eine konvergente Doppelreihe reeller Glieder, und ist ferner

$$|u_m^{(n)}| \leqq a_m^{(n)}, \qquad N \leqq m + n,$$

wo N eine feste Zahl bedeutet, so konvergiert offenbar die vorgelegte Doppelreihe (B).

Eine besondere einfache Reihe entsteht aus den Gliedern der Doppelreihe durch schräge Summation:

$$u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_0^{(1)} + u_2^{(0)} + u_1^{(1)} + u_0^{(2)} + u_3^{(0)} + \cdots.$$

1. Satz. Konvergenzkriterium. *Vorgelegt sei eine Doppelreihe* (B), *deren Glieder reell und positiv oder Null sind:*

$$0 \leqq u_m^{(n)}.$$

Damit dieselbe konvergiere, genügt,

a) *daß jede Zeile von* (B) *konvergiert:*

$$u^{(k)} = u_0^{(k)} + u_1^{(k)} + \cdots;$$

b) *daß die Reihe der* $u^{(k)}$:

$$u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots,$$

konvergiert.

Sei U' der Wert dieser letzten Reihe. Aus der Reihe (B) greife man in willkürlicher Weise eine beliebige Anzahl von Gliedern heraus und bezeichne ihre Summe mit S. Wir wollen zeigen, daß

$$S \leqq U'.$$

Sei $\nu - 1$ der größte Wert des oberen Index n eines in S auftretenden Gliedes $u_m^{(n)}$, und man bilde die Summe:

$$s_\nu = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots + u^{(\nu-1)}.$$

Letztere wird auch durch die Reihe

$$u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + \cdots + u_0^{(\nu-1)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_1^{(\nu-1)} + u_2^{(0)} + \cdots$$

dargestellt. Diese Reihe enthält aber alle Glieder von S. Mithin ist

$$S \leqq s_\nu.$$

Andererseits ist aber

$$s_\nu \leqq U',$$

und hiermit ist der Satz bewiesen.

Die Bedingung ist auch notwendig; vgl. den nächsten Satz.

2. Satz. *Konvergiert die Doppelreihe* (B), *so konvergiert erstens jede Zeile derselben absolut:*

$$u^{(k)} = u_0^{(k)} + u_1^{(k)} + \cdots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

zweitens konvergiert die Reihe der $u^{(k)}$ absolut; und drittens ist der Wert letzterer Reihe gleich dem Werte U der Doppelreihe:

$$U = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots. \tag{1}$$

Der erste Teil des Satzes ist richtig, da die Glieder einer Zeile bloß eine Auswahl von Gliedern aus einer bekanntlich absolut konvergenten Reihe sind. Um den Beweis der weiteren Teile zu führen, setzen wir

$$|u_m^{(n)}| = v_m^{(n)}$$

und bilden die Doppelreihe

$$\sum\sum v_m^{(n)}. \tag{C}$$

Nach den Voraussetzungen des Satzes muß dieselbe konvergieren; ihr Wert werde mit V bezeichnet. Dem ersten Teile des Satzes zufolge konvergieren nun die Zeilen dieser Reihe; sei

$$v^{(k)} = v_0^{(k)} + v_1^{(k)} + \cdots,$$

$$t_\nu = v^{(0)} + v^{(1)} + \cdots + v^{(\nu-1)}.$$

Dann ist auch

$$t_\nu = v_0^{(0)} + \cdots + v_0^{(\nu-1)} + v_1^{(0)} + \cdots + v_1^{(\nu-1)} + v_2^{(0)} + \cdots.$$

Da nun aber $0 \leqq v_m^{(n)}$ ist, so ergibt sich, daß

$$t_\nu \leqq V$$

ist, woraus denn die Konvergenz der Reihe

$$v^{(0)} + v^{(1)} + \cdots$$

hervorgeht. Hiermit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen, denn es ist

$$| u^{(k)} | \leqq v^{(k)}.$$

Der Wert der Reihe der $u^{(k)}$ werde mit U', die Summe der ersten n Glieder derselben mit s_n bezeichnet:

$$U' = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots,$$

$$s_n = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots + u^{(n-1)}.$$

Um den Beweis noch fertigzustellen, sei

$$S_m^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} u_j^{(k)}, \qquad T_m^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} v_j^{(k)},$$

and man nehme eine positive Zahl ε beliebig klein an. Dann gibt es zwei feste Zahlen μ, ν derart, daß

$$V - T_m^{(n)} < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $\mu \leqq m$ und $\nu \leqq n$ genommen werden. Jetzt wird aber auch

$$| U - S_m^{(n)} | < \varepsilon, \qquad \begin{cases} \mu \leqq m, \\ \nu \leqq n \end{cases}$$

sein.

Des weiteren werde ν' so gewählt (und dann festgehalten), daß

$$| U' - s_n | < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $\nu' \leqq n$ genommen wird.

Sei N die größere der beiden Zahlen ν, ν'. Dann ist:

i) $$| U - S_m^{(N)} | < \varepsilon, \qquad \mu \leqq m$$

ii) $$| U' - s_N | < \varepsilon.$$

Jetzt kann man aber μ' so wählen, daß

$$| s_N - S_m^{(N)} | < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $\mu' \leqq m$ genommen wird. Sei M die größere der beiden Zahlen μ, μ'. Dann ist

$$\text{iii)} \qquad | s_N - S_M^{(N)} | < \varepsilon .$$

Aus der Relation i), geschrieben für $m = M$, nebst ii) und iii), ergibt sich nun, daß

$$| U - U' | < 3\varepsilon$$

ist, und damit ist auch der dritte Teil des Satzes bewiesen.[1])

Zusatz. *Der Wert einer konvergenten Doppelreihe wird erhalten, indem man sowohl nach den Zeilen als auch nach den Kolonnen summiert.*

Konvergiert nämlich eine Doppelreihe, so konvergiert auch die neue Doppelreihe, welche dadurch entsteht, daß man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, d. h. daß man die Glieder an der Diagonale spiegelt.

Diese Folgerung aus dem 2. Satze gibt zu einem wichtigen Theorem Anlaß, welches wir hiermit aussprechen.

3. Satz. *Vorgelegt sei eine konvergente unendliche Reihe:*

$$u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots,$$

deren Glieder wieder konvergente Reihen sind:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \cdots, \\ u^{(1)} &= u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \cdots, \\ u^{(2)} &= u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

1) Man beachte wohl, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht möglich ist, daß also folgende Bedingung zur Konvergenz der Doppelreihe (B) *nicht* hinreicht: „die Zeilen konvergieren sämtlich absolut, und die aus ihren Werten gebildete Reihe konvergiert ebenfalls absolut", wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} + 0 + 0 + \cdots \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 + \cdots \\ 0 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Man bilde die Reihen aus den Kolonnen dieses Schemas:

$$u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_0^{(2)} + \cdots,$$
$$u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots,$$
$$n_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Soll jede dieser Reihen absolut konvergieren:

$$u_k = u_k^{(0)} + u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots,$$

und soll die aus diesen Werten gebildete Reihe ebenfalls absolut konvergieren; soll endlich der Wert dieser letzten Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

gleich dem Wert der vorgelegten Reihe sein; so genügt dazu die Konvergenz der entsprechenden Doppelreihe.

Daß der Satz nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung vorstellt, zeigt das in der Anmerkung auf S. 34 gegebene Beispiel.

Wir können diesem Satze auch die folgende Formulierung erteilen. *Damit alle in den beiden iterierten Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(n)}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m^{(n)}$$

auftretenden Reihen absolut konvergieren, sowie die iterierten Reihen selbst denselben Wert haben, genügt die Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum \sum u_m^{(n)}.$$

Diese Formulierung hat den Vorzug, daß dabei der Unterschied zwischen einer *mehrfachen Reihe* und einer *iterierten Reihe* scharf betont wird. Das allgemeine Glied beider Reihen ist zwar das nämliche, $u_{m_1 \ldots m_n}$; im Falle $n = 2$ hat man einfach $u_m^{(n)}$. Während nun aber die mehrfache Reihe durch einen einzigen einfachen Grenzübergang ausgewertet wird, tritt bei den iterierten Reihen ein doppelter Grenzübergang auf, indem man zuerst — um beim einfachsten Falle zu verbleiben — die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(n)} = u^{(n)}$$

berechnet, worauf noch ein zweiter Grenzübergang,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)},$$

vorgenommen wird.

Die entsprechenden Sätze im Falle $m > 2$. Die soeben besprochenen Sätze übertragen sich sofort auf m-fache Reihen, $m > 2$, zerlegen sich aber dabei in verschiedene Gruppen. Ist beispielsweise $m = 3$, so läßt die konvergente 3-fache Reihe

$$U = \sum\sum\sum u_{m_1 m_2 m_3}$$

nicht nur jede der 6 Darstellungen zu:

$$U = \sum_{m_i=0}^{\infty} \sum_{m_j=0}^{\infty} \sum_{m_k=0}^{\infty} u_{m_1 m_2 m_3},$$

wobei i, j, k die drei Zahlen $1, 2, 3$ in beliebiger Reihenfolge bedeuten. Dazu gesellen sich noch die 6 weiteren Formeln:

$$U = \sum_{m_i=0}^{\infty} \left(\sum\sum u_{m_1 m_2 m_3}\right) = \sum\sum \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} u_{m_1 m_2 m_3}\right), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Einer konvergenten 4-fachen Reihe

$$U = \sum\sum\sum\sum u_{m_1 m_2 m_3 m_4}$$

entsprechen ebenso

a) 24 Darstellungen

$$U = \sum_{m_i=0}^{\infty} \sum_{m_j=0}^{\infty} \sum_{m_k=0}^{\infty} \sum_{m_l=0}^{\infty} u_{m_1 m_2 m_3 m_4};$$

b) 8 Darstellungen

$$U = \sum_{m_i=0}^{\infty} \left(\sum\sum\sum u_{m_1 m_2 m_3 m_4}\right) = \sum\sum\sum \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} u_{m_1 m_2 m_3 m_4}\right);$$

c) 6 Darstellungen

$$U = \sum_{m_i, m_j}\sum \left(\sum_{m_k, m_l}\sum u_{m_1 m_2 m_3 m_4}\right).$$

Analogie mit den mehrfachen Integralen. Wie man sieht, herrscht hier eine vollständige Analogie mit dem Fundamentalsatz der Integralrechnung, wonach ein mehrfaches Integral durch ein iteriertes Integral ausgewertet wird.

Über das Produkt mehrerer Reihen. Sind zwei absolut konvergente einfache Reihen

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$
$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

vorgelegt, so läßt sich bekanntlich ihr Produkt durch eine ebenfalls absolut konvergierende Reihe, wie folgt, darstellen:

$$UV = u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0 + u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0 + u_0v_3 + \cdots.$$

Dieser Satz wird mit Hilfe einer Doppelreihe in äußerst einfacher Weise begründet. Man beweist nämlich sofort mit Hilfe des 1. Satzes die Konvergenz der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + \cdots \\ u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + \cdots \\ u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Indem man diese Reihe einmal durch den 2. Satz, sodann aber durch schräge Summation auswertet, ergibt sich der gewünschte Beweis.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf das Produkt mehrerer ein- oder mehrfacher Reihen springt sofort in die Augen und wird ebenso, wie vorhin, bewiesen. Insbesondere erkennt man die Richtigkeit folgender Formeln:

$$\frac{1}{(1-z)(1-w)} = 1 + z + w + z^2 + zw + w^2 + z^3 + \cdots;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z_1)\ldots(1-z_m)} = 1 &+ z_1 + z_2 + \cdots + z_m \\ &+ z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_{m-1}z_m \\ &+ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \cdots + z_{m-2}z_{m-1}z_m \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

Dabei steht rechter Hand eine besondere, aus der Doppel- bzw. m-fachen Reihe

$$\sum\sum z^m w^n, \qquad \sum\cdots\sum z_1^{k_1}\ldots z_m^{k_m}$$

gebildete einfache Reihe. Letztere Reihen konvergieren im Kreiszylinderbereiche

$$|z| < 1, \quad |w| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |z_k| < 1, \qquad k=1,\ldots,m.$$

§ 14. Über Potenzreihen.

Unter einer *mehrfachen Potenzreihe* verstehen wir eine mehrfache Reihe von der Form

$$\text{(A)} \qquad \sum \cdots \sum C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}.$$

Auf solche Reihen übertragen sich die Potenzreihensätze von Bd. I, S. 102, 351, wie folgt.

1. Satz. *Bleiben die Glieder einer Potenzreihe* (A) *in einem Punkte*

$$(Z_1, \ldots, Z_n), \qquad 0 < |Z_k|, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

endlich, so konvergiert dieselbe in jedem innerhalb des Kreiszylinders

$$|z_k| < |Z_k|, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

gelegenen Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$.

Der Voraussetzung nach gibt es eine Konstante M derart, daß

$$|C_{m_1 \ldots m_n} Z_1^{m_1} \ldots Z_n^{m_n}| \leqq M$$

bleibt, wenn $m_1, \ldots, m_n$ unabhängig voneinander alle nicht-negativen ganzzahligen Werte durchlaufen.

Ist andererseits $(z_1, \ldots, z_n)$ ein innerer Punkt des genannten Bereiches, so ist

$$\left|\frac{z_k}{Z_k}\right| < 1, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Indem man nun

$$C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} = C_{m_1 \ldots m_n} Z_1^{m_1} \ldots Z_n^{m_n} \left(\frac{z_1}{Z_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{z_n}{Z_n}\right)^{m_n}$$

setzt, erkennt man, daß durchweg

$$|C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}| \leqq M \left|\frac{z_1}{Z_1}\right|^{m_1} \cdots \left|\frac{z_n}{Z_m}\right|^{m_n}$$

bleibt. Rechter Hand steht aber das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe, vgl. § 13, Ende, womit denn der Beweis erbracht ist.

Unter einer *konvergenten Potenzreihe* versteht man eine solche, welche mindestens in einem Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$ konvergiert, dessen Koordinaten sämtlich von Null verschieden sind. Nach dem voraufgehenden Satze konvergiert eine derartige Reihe mindestens innerhalb eines bestimmten Zylinderbereiches $(T) = (T_1, \ldots, T_n)$.

2. Satz. *Die Gesamtheit der Konvergenzstellen* $(z_1, \ldots, z_n)$ *einer konvergenten Potenzreihe bildet einen* $2n$*-fach ausgedehnten, einfach zusammenhängenden Bereich* $\mathfrak{T}$*, wozu sich noch gewisse in den Koordinatenebenen befindliche, außerhalb* $\mathfrak{T}$ *gelegene Bereiche von* $2k$ *Dimensionen,* $1 \leqq k \leqq n-1$*, gesellen können.*[1])

Der Rand $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{T}$ *wird von jedem Strahle*

$$L: \qquad z_k = a_k t, \qquad 0 \leqq t < \infty, \qquad (t, \text{ reell})$$

$$0 < |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

in einem einzigen endlichen oder unendlich fernen Punkte (ζ) *getroffen. Vom Falle einer beständig konvergenten Reihe abgesehen liegt* (ζ) *stets im Endlichen, sofern kein* a_k *verschwindet, und* $\mathfrak{M}$ *verläuft ausnahmslos stetig, sowohl im Endlichen als auch im unendlich fernen Bereiche der projektiven Geometrie.*

Zum Beweise sei (Z), $Z_k \neq 0$, $k=1,\ldots,n$, eine Konvergenzstelle der Reihe. Dann konvergiert die Reihe mindestens im $2n$-fach ausgedehnten Zylinderbereiche

$$\mathfrak{S}: \qquad |z_k| < |Z_k|, \qquad k=1,\ldots,n.$$

Ist (a), $a_k \neq 0$, $k=1,\ldots,n$, ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}$, so wird die Reihe zunächst in jedem Punkte $(ta) = (ta_1, \ldots, ta_n)$ des Strahles L konvergieren, wofür $0 \leqq t \leqq 1$ ist. Schließen wir ein für allemal die beständig konvergenten Reihen aus, so müssen die Werte von t, wofür ta eine Konvergenzstelle ist, eine obere Grenze τ haben, und zwar muß $\tau > 1$ sein. Dementsprechend konvergiert die Reihe im Zylinderbereiche

$$\mathfrak{R}: \qquad |z_k| < \tau\, |a_k|, \qquad k=1,\ldots,n.$$

Dagegen divergiert sie in jedem Punkte (ta), wofür $t > \tau$ ist.

Hiermit ist dargetan, daß die Reihe in der vollen $2n$-fach ausgedehnten Umgebung einer jeden Stelle der endlichen Strecke

$$z_k = ta_k, \qquad 0 \leqq t < \tau, \qquad k=1,\ldots,n,$$

konvergiert, während sie andererseits für Punkte einer jeden Umgebung der Stelle (τa) divergiert.

Ist dagegen (a) ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}$, welcher in einer Koordinatenebene liegt, so kann die Reihe in jedem Punkte von L

1) Näheres über diese Bereiche findet sich am Schlusse des Paragraphen.

konvergieren, wie das Beispiel zeigt: $n = 2$,

$$\frac{z_1}{1 - z_2} = z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + \cdots,$$

$(a) = (0, a_2)$, $a_2 \neq 0$.

Wir müssen hier zwischen solchen Punkten (ta) von L, in deren voller $2n$-fach ausgedehnter Umgebung die Reihe konvergiert, und den übrigen Punkten von L unterscheiden. Für die Punkte ersterer Art hat t eine obere Grenze τ, oder aber sie füllen den ganzen Strahl aus, wie bei der Reihe $(n = 2)$

$$\frac{z_1}{1 - z_1 z_2} = z_1 + z_1^2 z_2 + z_1^3 z_2^2 + \cdots,$$

$(a) = (0, a_2)$, $a_2 \neq 0$.

Die Punkte der in keiner Koordinatenebene belegenen Strecken (ta), $0 \leqq t < \tau$, nebst den Punkten erster Art von den in einer Koordinatenebene belegenen Strahlen bilden nun einen $2n$-fach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{T}$, in welchem die Reihe konvergiert, und mit $\mathfrak{T}$ werden umgekehrt alle diejenigen Punkte des Raumes erschöpft, in deren voller Umgebung die Reihe konvergiert. Der Rand von $\mathfrak{T}$ wird durch die endlichen Punkte $(\zeta) = (\tau a)$, $|a_1| + \cdots + |a_k| > 0$, nebst solchen unendlich fernen Punkten geliefert, welche eventuell auf aus lauter Punkten erster Art bestehenden Strahlen der Koordinatenebenen liegen.

Hiermit ist auch zugleich gezeigt, daß jeder Strahl den Rand von $\mathfrak{T}$ in einem einzigen endlichen oder unendlich fernen Punkte (ζ) trifft.

Stetigkeit des Randes. Was nun die Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ anbetrifft, so sei $(\zeta^0) = (\tau_0 a)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, welcher zunächst in keiner Koordinatenebene liegen möge. Sei ferner

$$|a_k| = R_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Dann ist jedes R_k positiv und außerdem ist $\tau_0 > 1$.

Wir nehmen jetzt eine positive Größe ε beliebig klein an und bezeichnen mit $\mathfrak{U}$ die Umgebung des Punktes (a):

$\mathfrak{U}$: $$|z_k - a_k| < \varepsilon, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Dabei soll $\mathfrak{U}$ im Bereiche

$\mathfrak{K}_0$: $$|z_k| < \tau_0 R_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

liegen und an keine der Koordinatenebenen hinanreichen. Demgemäß ist

$$(1) \qquad \varepsilon < R_k; \qquad R_k + \varepsilon \leqq \tau_0 R_k, \qquad \text{also} \qquad \varepsilon \leqq (\tau_0 - 1) R_k.$$

Sei (z') ein willkürlicher Punkt von $\mathfrak{U}$ und $(\zeta') = (\tau' z')$ der entsprechende Punkt von $\mathfrak{M}$. Wir wollen τ' abschätzen. Ich behaupte nun: für mindestens ein Wertepaar i, j ist

$$(2) \qquad \frac{R_i \tau_0}{R_i + \varepsilon} \leqq \tau' \leqq \frac{R_j \tau_0}{R_j - \varepsilon}.$$

Wäre nämlich

$$\tau' > \frac{R_k \tau_0}{R_k - \varepsilon}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

so müßte wegen der Beziehung

$$|z'_k| > R_k - \varepsilon, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

die Ungleichung statthaben:

$$|\zeta'_k| = \tau' \, |z'_k| > R_k \tau_0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Mithin konvergiert die Reihe in einem den Bereich $\mathfrak{K}_0$ im Innern enthaltenden Bereiche

$$|z_k| < |\zeta'_k|,$$

was gegen die Voraussetzung verstößt.

In ähnlicher Weise beweist man, daß die Annahme:

$$\tau' < \frac{R_k \tau_0}{R_k + \varepsilon}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

zu einem Widerspruch führt.

Aus der Relation (2) ergibt sich sofort, daß τ eine stetige Funktion von (z) im Bereiche $\mathfrak{U}$ ist. Sei λ die Länge der Konvergenzstrecke, also

$$\lambda = \sqrt{|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2} = \tau \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

Dann ist auch λ eine stetige Funktion von (z).

Eine bequeme Wahl der Koordinaten der ∞^{2n-1} durch die Umgebung des Punktes (a) durchgehenden Strahlen wäre folgende. Die Variabele z_1 werde auf einen in der Nähe des Punktes $z_1 = a_1$ gelegenen Bogen des Kreises $|z_1| = R_1$ beschränkt:

$$z_1 = R_1 e^{\theta i}.$$

Die übrigen $z_k = x_k + i y_k$ mögen unbeschränkt in der Nähe der bezüglichen Punkte a_k verlaufen. Dann liefern die Variabelen

$\theta, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ das in Aussicht gestellte Koordinatensystem. Von diesen $2n-1$ Variabelen hängt λ stetig ab, womit denn bewiesen ist, daß $\mathfrak{M}$ in der Nähe von (ζ^0) eine stetige Mannigfaltigkeit ist.

Es bleibt noch der Fall übrig, daß $(\zeta^0) = (\tau_0 a)$ in einer Koordinatenebene liegt und ein endlicher Punkt derselben ist. Um die Darstellung zu erleichtern, sei $a_n = 0$, $|a_k| = R_k \neq 0$, $k=1,\ldots,n-1$. Wir wählen ε jetzt so, daß der Bereich

$$\mathfrak{U}: \qquad |z_k - a_k| < \varepsilon, \qquad k=1,\ldots,n-1; \qquad |z_n| < R_n$$

in $\mathfrak{T}$ liegt und an keine zweite der Koordinatenebenen hinanreicht. Demgemäß gelten die Relationen (1) für $k = 1, \ldots, n-1$. Sei (z') ein willkürlicher Punkt von $\mathfrak{U}$ und sei $(\zeta') = (\tau' z')$ der entsprechende Punkt von $\mathfrak{M}$. Dann wird mindestens für ein Wertepaar i, j, wobei sich nun i und j unter den Zahlen $1, \ldots, n-1$ befinden, die Relation (2) statthaben. Denn die Punkte (ta), $0 \leqq t < \tau_0$ des bewußten Strahles liegen alle in $\mathfrak{T}$, und keine anderen Punkte dieses Strahles liegen in $\mathfrak{T}$. Von hier ab verläuft der Beweis ähnlich wie im vorhergehenden Falle.

Das Verfahren läßt sich in ersichtlicher Weise auf den Fall ausdehnen, daß mehrere a_k verschwinden.

Unendlich ferne Punkte von $\mathfrak{M}$. Erstreckt sich $\mathfrak{M}$ ins Unendliche, so sei L ein Strahl, in dessen Umgebung Strahlen liegen, deren zugehörige Längen, d. h. λ-Werte nicht endlich bleiben. Dann muß L vor allem in einer oder mehreren Koordinatenebenen liegen. Sei etwa

$$a_k \neq 0, \qquad k=1,\ldots,n-1; \qquad a_n = 0.$$

Des weiteren liegt der ganze Strahl L in $\mathfrak{T}$, denn in einem endlichen Punkte von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ ja stetig.

Man erkennt ferner, daß jeder andere Strahl

$$z_k = t b_k, \qquad 0 \leqq t < \infty, \qquad b_k \neq 0, \qquad k=1,\ldots,n-1; \qquad b_n = 0$$

ebenfalls ganz in $\mathfrak{T}$ liegt. Denn einem beliebig großen Werte von t entspricht ein Bereich

$$|z_k| < t\,|a_k|, \qquad k=1,\ldots,n-1; \qquad |z_n| < h,$$

in welchem die Reihe konvergiert, und nun braucht man t nur so anzunehmen, daß, nach beliebiger Wahl von t',

$$t\,|a_k| > t'\,|b_k|, \qquad k=1,\ldots,n-1.$$

Wären mehrere a_k gleich Null:

$$a_k \neq 0, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,l;} \qquad a_k = 0, \qquad {\scriptstyle k=l+1,\ldots,n,}$$

so könnte man ebenso zeigen, daß jeder Strahl

$$z_k = tb_k, \quad 0 \leqq t < \infty, \quad b_k \neq 0, \quad {\scriptstyle k=1,\ldots,l;} \quad b_k = 0, \quad {\scriptstyle k=l+1,\ldots,n,}$$

gleichfalls ganz in $\mathfrak{T}$ liegt.

Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ im Unendlichen. Fassen wir den $2n$-dimensionalen Raum der z_k als den (reellen) projektiven Raum (vgl. § 17) auf, so verläuft $\mathfrak{M}$ stetig in jedem unendlich fernen Punkte. Sei nämlich (Z) ein unendlich ferner Punkt von $\mathfrak{M}$ und sei L der zu (Z) hinführende Strahl. Wäre nun $\mathfrak{M}$ nicht stetig in (Z), so müßte es eine Menge von Strahlen geben, welche L zum Häufungsstrahl haben und deren zugehörige Punkte $(\zeta_1), (\zeta_2), \ldots$ im Endlichen blieben. Diese Punkte müßten dann mindestens eine Häufungsstelle $(\bar{\zeta})$ auf L haben. Das geht aber offenbar nicht an.

Näheres über die Konvergenzmannigfaltigkeiten niederer Ordnung. Jetzt können wir den ganzen Ort der Konvergenzstellen der Reihe näher präzisieren. Hierzu gehören vor allem die Punkte von $\mathfrak{T}$, welche in keiner Koordinatenebene liegen, nebst eventuellen ebenfalls in keiner Koordinatenebene belegenen Randpunkten. Setzen wir nun eine Koordinate gleich Null, etwa $z_n = 0$, so entsteht eine neue Reihe in $n-1$ Variabelen. Konvergiert diese beständig, so gehört jeder endliche Punkt der ganzen Hyperebene $z_n = 0$ zum bewußten Orte. Sonst liegt die Sache wieder genau so wie bei der ursprünglichen Reihe, nur handelt es sich jetzt um eine Reihe mit $n-1$ Variabelen. Diese wird vor allem in einem $(2n-2)$-dimensionalen in der Hyperebene $z_n = 0$ belegenen, den Schnitt von $\mathfrak{T}$ mit dieser Hyperebene enthaltenden Raume $\mathfrak{T}_1$ konvergieren. Außer diesen letzten Punkten kann $\mathfrak{T}_1$ insbesondere noch die Punkte eines weiteren $(2n-2)$-dimensionalen Bereiches enthalten, wie die Beispiele zeigen: $n = 2$,

$$\text{(a)}\ \frac{z}{1-w} + \frac{1}{2-w}; \qquad \text{(b)}\ \frac{z}{1-w} + \frac{1}{2-w} + \frac{w}{4-z} + \frac{1}{5-z}.$$

Der Rand $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{T}_1$ wird, sofern die neue Reihe nicht beständig konvergiert, von jedem in keiner zweiten Koordinatenebene gelegenen Strahle in einem endlichen Punkte getroffen und in der Nähe des Schnittpunktes stetig verlaufen.

Nachdem man nun alle n Koordinatenebenen so untersucht hat, wird man zu den linearen Gebilden schreiten, welche durch das Verschwinden von zwei Koordinaten definiert werden, etwa $z_{n-1} = 0$, $z_n = 0$. Die Behandlung ist dieselbe wie im vorliegenden Falle, und so geht es fort, bis man alle Fälle erschöpft hat. Daß alle im Laufe der Untersuchung gedachten Fälle auch wirklich vorkommen können, tut man leicht an Beispielen dar, wozu man die Reihen in $(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$:

$$\frac{z_1 + z_2 w + z_3 w^2 + \cdots + z_k w^{k-1}}{1 - w},$$

$$\frac{z_1 + z_2 w + \cdots + z_k w^{k-1}}{1 - w} + \frac{1}{2 - w},$$

benutzen kann. Dabei soll k eine beliebige der Zahlen $1, \ldots, n-1$ sein.

Es bleibt nur noch übrig zu beweisen, daß der Bereich $\mathfrak{T}$ linear zusammenhängt. Sei

$$C: \qquad z_k = \varphi_k(\lambda) + i\psi_k(\lambda), \qquad \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

eine reguläre Kurve, deren Punkte sämtlich zu $\mathfrak{T}$ gehören. Dann gehen die Kurven

$$C_\alpha: \qquad z_k = \alpha\varphi_k(\lambda) + i\alpha\psi_k(\lambda), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

durch stetige Umformung aus C hervor, und zwar liegen dieselben sämtlich im Innern von $\mathfrak{T}$. Ist nun S ein nebst seinem Rande innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegener Kreiszylinderbereich um den Anfang $(z) = (0)$, so kann man α so wählen, daß C_α in S liegt. Hiermit ist denn der Beweis erbracht.

Bemerkung. Eine mehrfache Potenzreihe kann in jeder Koordinatenebene und sonst nirgends konvergieren, wie das Beispiel zeigt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!\,(z_1 \ldots z_n)^k.$$

Hier existiert kein Bereich $\mathfrak{T}$, und die Reihe gehört nicht zur Klasse konvergenter Potenzreihen.

Aufgabe. Man schreibe die Gleichung bzw. Gleichungen nebst Ungleichungen hin, welche in den folgenden Fällen $\mathfrak{M}$ dar-

stellen:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{1-wz}; \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{1-w}+\frac{1}{1-z};$$

$$\text{(c)}\quad \frac{1}{1-w-z}; \qquad \text{(d)}\quad \frac{1}{1-wz}+\frac{1}{1-w}.$$

Assoziierte Konvergenzradien. Ist $(r_1, \ldots, r_n)$ ein Zahlenkomplex derart, daß eine Potenzreihe im Zylinderbereiche

$$\mathfrak{K}: \qquad |z_k| < r_k, \qquad k=1,\ldots,n,$$

konvergiert, während sie in jedem $(\mathfrak{K})$ umfassenden Zylinderbereiche

$$|z_n| < r_k', \quad r_k' \geqq r_k, \quad k=1,\ldots,n; \qquad \sum_{k=1}^{n} r_k' > \sum_{k=1}^{n} r_k,$$

divergiert, so heißen $r_1, \ldots, r_n$ *assoziierte Konvergenzradien.*

Der Bereich $\mathfrak{K}$ liegt in $\mathfrak{T}$ und reicht mindestens mit einem Randpunkte bis an den Rand $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ hinan. Es ist aber nicht umgekehrt wahr, daß jeder in $\mathfrak{T}$ belegene Zylinderbereich $|z_k| < r_k$, $k=1,\ldots,n$, welcher bis an den Rand $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ hinanreicht, ein System assoziierter Konvergenzradien liefert, wie das Beispiel der der Funktion

$$\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-w}$$

zugehörigen Reihe im Bereiche

$$|z| < 1, \qquad |w| < \tfrac{1}{2}$$

zeigt.

Der Begriff läßt sich dadurch erweitern, daß man einigen der Bereiche $|z_k| < r_k$ gestattet, sich auf die ganze endliche Ebene auszudehnen. Im Symbol $(r_1, \ldots, r_n)$ kann man dann die betreffende Stelle, anstatt mit r_k, durch das Symbol ∞ besetzen.

Im allgemeinen gibt es unendlich viele verschiedene Systeme assoziierter Konvergenzradien, wie die Reihen der vorstehenden Aufgabe zeigen.

Über die gegenseitige Abhängigkeit der assoziierten Konvergenzradien voneinander existiert eine Reihe von Untersuchungen.[1]

---

1) Es sei auf das *Madison Colloquium* der *Amer. Math. Soc.*, 1913, *Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables*, Lecture II, § 7 verwiesen.

3. Satz. *Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in einem beliebigen abgeschlossenen innerhalb ihres Konvergenzbereiches $\mathfrak{T}$ belegenen Bereiche S.*

Liegt S innerhalb eines in $\mathfrak{T}$ befindlichen Kreiszylinderbereiches um den Anfang, so überträgt sich der Beweis für den Fall $n = 1$ (Bd. I, S. 103) ohne weiteres auf den gegenwärtigen Fall.

Ist S dagegen kein derartiger Bereich, so kann man S offenbar in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegen, derart, daß die Reihe in jedem derselben gleichmäßig konvergiert, und daraus geht schon die Richtigkeit des Satzes hervor.

Will man den Beweis noch näher ausführen, so gehe man etwa von der Bemerkung aus, daß ein beliebiger Punkt (a) von S im Innern von $\mathfrak{T}$ und sonach auch im Innern eines geeigneten in $\mathfrak{T}$ befindlichen Kreiszylinderbereiches liegt. Mithin gibt es eine Umgebung

$$|z_k - a_k| < \varepsilon, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

des Punktes (a), worin die Reihe gleichmäßig konvergiert. Sei η die obere Grenze derartiger ε-Werte. Hiermit ist jedem Punkte des abgeschlossenen Bereiches S eine positive Zahl η zugeordnet. Wäre nun die untere Grenze dieser Zahlen η gleich Null, so müßte es einen Punkt (a') von S geben, in dessen jeder Umgebung η beliebig kleine Werte annähme, und damit werden wir zu einem Widerspruch geführt.[1])

Auf Grund des Weierstraßschen Reihensatzes, § 8, 1. Satz, erhält man nun das folgende Theorem.

4. Satz. *Eine konvergente Potenzreihe stellt eine im Innern des Konvergenzbereiches $\mathfrak{T}$ der Reihe analytische Funktion vor.*

Im übrigen läßt sie sich in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{T}$ beliebig oft gliedweise differentiieren, wobei nun die dadurch entstehenden Potenzreihen in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{T}$ ebenfalls konvergieren und somit Funktionen liefern, welche sich dort auch analytisch verhalten.

Aus diesem letzten Satze ergibt sich folgende Formel. Ist

$$\sum \cdots \sum C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

1) Man kann sich hier auch der Formulierung dieser Schlußweise bedienen, welche sich im Theorem des Bd. I, S. 50 befindet. Es sei hier noch beiläufig bemerkt, daß Cousin diesen letzten Satz im wesentlichen formuliert und bewiesen hatte; vgl. *Acta Mathematica* 19 (1895), S. 22.

eine konvergente Potenzreihe und wird der Wert derselben mit $f(z_1, \ldots, z_n)$ bezeichnet, so ist

$$C_{m_1 \cdots m_n} = \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \left(\frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \right)_{(z) = (0)}.$$

Darin liegt auch der Beweis des folgenden Satzes.

5. Satz. Identitätssatz. *Verschwindet der Wert einer konvergenten Potenzreihe in jedem Punkte der Umgebung des Anfangs, so verschwindet jeder Koeffizient derselben.*

Stimmen die Werte zweier konvergenten Potenzreihen in jedem Punkte der Umgebung des Anfangs miteinander überein, so haben ihre Koeffizienten bzw. gleiche Werte.

Diese Sätze lassen eine ähnliche Verallgemeinerung zu, wie im Falle $n = 1$ (Bd. I, S. 353). Wir erinnern vor allem an folgenden Satz betreffend Polynome.

Verschwindet das Polynom

$$\sum \sum C_{m,n} z^m w^n, \qquad \begin{cases} m = 0, 1, \ldots, M; \\ n = 0, 1, \ldots, N, \end{cases}$$

in jedem der $(M+1)(N+1)$ *Punkte*

$$(z_k, w_l), \qquad \begin{cases} k = 0, 1, \ldots, M; \\ l = 0, 1, \ldots, N, \end{cases}$$

wo $z_0, z_1, \ldots, z_M$ $M+1$ *getrennte Zahlen, und ebenso* $w_0, w_1, \ldots, w_N$ $N+1$ *getrennte Zahlen bedeuten, so verschwindet dasselbe identisch.*

Dieser Satz läßt sich, wie folgt, auf mehrfache Potenzreihen übertragen.

6. Satz. Der verallgemeinerte Identitätssatz.[1] *Sei*

$$\sum \sum C_{m,n} z^m w^n$$

eine im Bereiche $|z| < A$, $|w| < B$ *konvergente Potenzreihe. Seien ferner*

$$z_0, z_1, \ldots, \qquad 0 < |z_k| < A,$$

$$w_0, w_1, \ldots, \qquad 0 < |w_l| < B,$$

1) Der Einfachheit der Darstellung halber wird der Satz bloß für Reihen mit zwei Argumenten ausgesprochen und bewiesen.

zwei Punktmengen, derart, daß

$$\lim_{k=\infty} z_k = 0, \qquad \lim_{l=\infty} w_l = 0$$

ist. Verschwindet dann die durch die vorstehende Reihe dargestellte Funktion $F(z, w)$ in jedem Punkte (z_k, w_l), wobei k und l unabhängig voneinander die Werte $0, 1, 2, \ldots$ durchlaufen:

$$F(z_k, w_l) = 0,$$

so verschwindet jeder Koeffizient der Reihe.

Der Beweis ergibt sich, indem man die vorgelegte Reihe vermöge des 2. Satzes von § 13 (vgl. den 8. Satz unten) durch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} z^m\Big) w^n$$

darstellt und dann den Satz von Bd. I, S. 353 zweimal in Anwendung bringt.

Konvergieren zwei Potenzreihen

$$\sum\sum C_{mn} z^m w^n, \qquad \sum\sum D_{mn} z^m w^n$$

im Bereiche $|z| < A$, $|w| < B$ und stimmen sie in jedem Punkte der vorbezeichneten Menge miteinander überein, so haben ihre Koeffizienten bzw. gleiche Werte.

7. Satz. *Sei $F_1, F_2, \ldots$ eine Folge von Funktionen der Variabelen $z_1, \ldots, z_n$, deren jede in ein und demselben Bereiche T sich analytisch verhält und wovon keine identisch verschwindet. Dann gibt es einen inneren Punkt (a) von T, in welchem keine dieser Funktionen verschwindet.*

Damit der Satz nicht trivial erscheine, bemerken wir vor allem, daß die Punkte von T, in denen mindestens eine der Funktionen verschwindet, eine in T überall dichte Punktmenge zu bilden vermögen.

Sei (ζ) ein innerer Punkt von T, wofür $F_1(z_1, \ldots, z_n)$ nicht verschwindet. Dann kann man (ζ) mit einem abgeschlossenen innerhalb T belegenen Bereich τ umgeben, in welchem F_1 nirgends verschwindet.

Sei (ζ') ein innerer Punkt von τ, in welchem $F_2(z_1, \ldots, z_n)$ nicht verschwindet. Dann kann man (ζ') mit einem abgeschlosse-

nen, in τ belegenen Bereiche τ' umgeben, in welchem F_2 nirgends verschwindet.

Fährt man so fort, so erhält man eine unendliche Folge ineinander eingeschachtelter Bereiche $\tau, \tau', \tau'', \ldots$, welche dann mindestens einen gemeinsamen Punkt (a) haben müssen. Dieser Punkt ist ein innerer Punkt von T, und in (a) verschwindet kein $F_k(z_1, \ldots, z_n)$.

Wir schließen den Paragraphen mit einer direkten Anwendung des 2. und 3. Satzes von § 13 auf Potenzreihen.

8. Satz. *Eine konvergente Potenzreihe*

$$\sum \cdots \sum C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

läßt sich durch eine iterierte Reihe, wie folgt, darstellen:

$$\sum \cdots \sum \Big(\sum \cdots \sum C_{m_1 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_k^{m_k} \Big) z_{k+1}^{m_{k+1}} \ldots z_n^{m_n}.$$

Konvergiert die ursprüngliche Reihe im Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$, *so wird auch jede der in der iterierten Reihe auftretenden Reihen für die entsprechenden Werte der* z_i *konvergieren, und die durch die iterierte Reihe gelieferte Zahl* U *wird außerdem mit dem Werte der vorgelegten Reihe übereinstimmen.*

Geht man umgekehrt von der iterierten Reihe aus, so wird sie stets dann konvergieren, wenn die entsprechende mehrfache Reihe konvergiert, und ihr Wert wird dann mit dem Werte dieser Reihe übereinstimmen.

§ 15. Die Cauchy-Taylorsche Reihe.

Der Cauchy-Taylorsche Reihensatz.[1]) *Sei* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *im Bereiche*

$$(1) \qquad |z_k - a_k| < r_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

analytisch. Dann läßt sich diese Funktion in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$ *fortschreitende Reihe entwickeln, und zwar ist*

$$(\mathrm{A}) \qquad f(z_1, \ldots, z_n) = \sum \cdots \sum \frac{f_{m_1, \ldots, m_n}}{m_1! \ldots m_n!} (z_1 - a_1)^{m_1} \ldots (z_n - a_n)^{m_n},$$

$$f_{m_1, \ldots, m_n} = \left(\frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \right)_{(z) = (a)}.$$

1) Vgl. das Zitat auf S. 20.

Dabei konvergiert die Reihe und stellt die Funktion für jeden Punkt des genannten Bereiches dar.

Die Darstellung ist überdies eindeutig.

Der Beweis ergibt sich sofort, geradeso wie im Falle $n = 1$, vermöge der Entwicklungen von § 12.

Man kann aber auch von der Formel ausgehen:

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)} = \sum \dots \sum \frac{(z_1 - a_1)^{m_1}\dots(z_n - a_n)^{m_n}}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1}\dots(\zeta_n - a_n)^{m_n+1}}$$

und diese Reihe in die Cauchysche Integralformel, § 10, eintragen. Der Formel (1), § 11, zufolge wird dann

$$\frac{f_{m_1,\dots,m_n}}{m_1!\dots m_n!} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{C_1} d\zeta_1 \dots \int\limits_{C_n} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1}\dots(\zeta_n - a_n)^{m_n+1}}$$

sein, wobei C_k einen um den Punkt a_k gelegten, den Punkt z_k umfassenden Kreis bedeutet, dessen Radius kleiner als r_k genommen werde. Durch den 3. Satz von § 14 ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe gesichert, während für die gliedweise Integration derselben der 2. Satz von § 8 bürgt.

Abhängigkeit von Parametern. Es ist keineswegs nötig, die Potenzreihenentwicklung auf sämtliche Argumente zu erstrecken. Man kann den Satz auch folgendermaßen formulieren und mit denselben Hilfsmitteln beweisen.

1. Satz. *Sei $f(z_1,\dots,z_n;\, u_1,\dots,u_p)$ im Bereiche*

$$(1') \qquad |z_k - a_k| < r_k, \quad k=1,\dots,n; \qquad |u_l - b_l| < s_l, \quad l=1,\dots,p,$$

analytisch. Dann läßt sich diese Funktion in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z_1 - a_1, \dots, z_n - a_n$ fortschreitende Reihe entwickeln, und zwar ist

$$(\mathrm{A}') \quad f(z_1,\dots,z_n;u_1,\dots,u_p) = \sum\dots\sum \frac{f_{m_1,\dots,m_n}}{m_1!\dots m_n!}(z_1 - a_1)^{m_1}\dots(z_n - a_n)^{m_n},$$

$$f_{m_1,\dots,m_n} = \left(\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f}{\partial z_1^{m_1}\dots\partial z_n^{m_n}}\right)_{(z)=(a),\ (u)=(u)}.$$

Dabei konvergiert die Reihe und stellt die Funktion für jeden Punkt des genannten Bereiches dar. Ferner verhalten sich die Koeffizienten der Reihe analytisch im Bereiche $|u_l - b_l| < s_l$, $l=1,\dots,p$. Endlich ist die Darstellung eindeutig.

Ein weiterer Satz wird am einfachsten durch die Cauchysche Integralformel bewiesen.

2. Satz. *Sei M: $(z_1, \ldots, z_n;\ u_1, \ldots, u_p)$ eine beliebige Punktmenge, welche nebst sämtlichen Häufungsstellen derselben im Bereiche* (1′) *liegt. Dann konvergiert die Reihe* (A′) *gleichmäßig in den Punkten von M.*

Endlich läßt sich die Reihe nach den Argumenten $z_1, \ldots, z_n$, $u_1, \ldots, u_p$ beliebig oft gliedweise differentiieren. Dabei verhalten sich die Koeffizienten der neuen Reihe analytisch im Bereiche $|u_l - b_l| < s_l$, $l=1,\ldots,p$, und der neuen Reihe kommt die für die ursprüngliche Reihe soeben ausgesprochene Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz ebenfalls noch zu.

§ 16. Folgerungen aus der Reihenentwicklung.

Vor allem erinnern wir an den Lehrsatz von § 12, S. 28. Derselbe läßt sich, wie auch schon bemerkt ist, sowohl durch die Taylorsche Reihe mit Restglied als auch durch die unendliche Reihe beweisen. Aus diesem Satze ergibt sich dann der Identitätssatz jenes Paragraphen.

Die Sätze von Bd. I, Kap. 7, § 14, S. 361/2 gestatten eine unmittelbare Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlichen. Insbesondere lautet der zweite Satz (Zusatz), wie folgt.

1. Satz. *Ist $f(w_1, \ldots, w_p)$ im Punkte $(0, \ldots, 0)$ analytisch, und entwickelt man f in eine Potenzreihe*

$$f(w_1, \ldots, w_p) = \sum \cdots \sum C_{m_1, \ldots, m_p} w_1^{m_1} \ldots w_p^{m_p}; \tag{1}$$

ist ferner $\varphi_k(z_1, \ldots, z_m)$ im Punkte $(0, \ldots, 0)$ analytisch, sowie

$$\varphi_k(0, \ldots, 0) = 0, \qquad k=1,\ldots,p,$$

und entwickelt man φ_k ebenfalls in eine Potenzreihe:

$$\varphi_k(z_1, \ldots, z_n) = \sum \cdots \sum A^{(k)}_{m_1, \ldots, m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}, \tag{2}$$

so wird $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, als Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ betrachtet, im Punkte $(z) = (0)$ analytisch sein. Alsdann erhält man die Koeffizienten der Taylorschen Reihenentwicklung letzterer Funktion nach Potenzen von $z_1, \ldots, z_n$ dadurch, daß man die einzelnen Glieder

der Reihe (1) *durch Einsetzen der Reihen* (2) *ausrechnet, um dann alle Glieder gleicher Ordnung sowohl in* $z_1, \ldots, z_n$ *als auch in den einzelnen* z_k *zu neuen Reihen zusammenzufassen. Diese Reihen konvergieren und liefern eben die Glieder der genannten Reihenentwicklung für* $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

Beweis, wie a. a. O. für $p = m = 1$.

Unter einer *ganzen Funktion* mehrerer Variabelen versteht man eine Funktion, welche sich in jedem endlichen Punkte analytisch verhält.

Insbesondere ist ein Polynom eine ganze Funktion und wird auch häufig als eine *ganze rationale Funktion* bezeichnet. Eine ganze Funktion, welche nicht gleich einem Polynom ist, heißt eine *ganze transzendente Funktion.*

2. Satz. *Sei* $G(z_1, \ldots, z_n)$ *eine ganze Funktion, und sei* $(c_1, \ldots, c_n)$ *ein Punkt, welcher einmal beliebig gewählt werden darf, dann aber festgehalten wird. Damit* G *ein Polynom sei, genügt, daß*

$$\lim_{z_k=\infty} \frac{G(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)}{z_k^{m_k}} = 0, \qquad k=1,\ldots,n,$$

wo (a) *ein beliebiger fester Punkt einer Umgebung,* τ, *von* (c) *ist und die Zahlen* m_k *konstante Werte haben.*

Wäre der Satz nicht richtig, so sei G eine transzendente Funktion, welche den Bedingungen des Satzes genügt. Dann müßte die Taylorsche Reihenentwicklung von G unendlich viele Glieder mit nicht verschwindenden Koeffizienten enthalten. Demgemäß müßte es mindestens ein Argument, etwa z_n, geben derart, daß, wenn man G nach Potenzen von z_n entwickelt:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = G_0 + G_1 z_n + G_2 z_n^2 + \cdots,$$

unendlich viele von diesen Koeffizienten nicht identisch verschwinden:

$$G_{k_i}(z_1, \ldots, z_{n-1}) \not\equiv 0, \qquad i=1,2,\ldots$$

Nach dem 7. Satze von § 14 kann man nun einen Punkt (a) von τ finden, in welchem kein G_{k_i} verschwindet. Dann ist aber $G(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ eine ganze transzendente Funktion von z_n, und hiermit sind wir zu einem Widerspruch geführt.

§ 17. Der unendlich ferne Bereich.

Die Gesichtspunkte, wonach ideale, den unendlich fernen Bereich bildende Elemente in der Geometrie eingeführt werden, sind bereits im ersten Bande (I, 7 § 9) bezeichnet worden.[1] In der Funktionentheorie handelte es sich damals, da nur eine unabhängige Veränderliche vorlag — was der Geometrie der Punktreihe oder des Strahl- bzw. Ebenenbüschels entspricht —, allein um die Transformation $w = \frac{1}{z}$ oder allgemeiner:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{1}$$

Die projektive Geometrie. Sobald aber die Anzahl der Variabelen größer als eins wird — wir beschränken uns der Einfachheit halber zunächst auf zwei Veränderliche —, so treten verschiedene Möglichkeiten auf. In der Geometrie denkt man wohl zuerst an die projektive Geometrie. Wir gehen von der eigentlichen Ebene der analytischen Geometrie aus, wobei die Koordinaten der Punkte komplexe Zahlen sind. Zwischen den genannten Punkten und den eigentlichen Zahlenpaaren (w, z) herrscht dann eine eineindeutige Beziehung. Indem man die projektive Transformation

$$\text{(A)} \qquad w' = \frac{a'w + b'z + c'}{aw + bz + c}, \qquad z' = \frac{a''w + b''z + c''}{aw + bz + c},$$
$$\Delta = \Sigma \pm ab'c'' \neq 0, \qquad 0 < |a| + |b|,$$

deren Umkehrung durch die Formeln

$$\text{(B)} \qquad w = \frac{A'w' + B'z' + C'}{Aw' + Bz' + C}, \qquad z = \frac{A''w' + B''z' + C''}{Aw' + Bz' + C},$$
$$\Delta' = \Sigma \pm AB'C'', \qquad \Delta\Delta' = 1, \qquad 0 < |A| + |B|$$

gegeben werde, ausübt, wird dadurch eine im allgemeinen ein-

---

1) Hierüber vgl. man ferner Bôcher: „The Infinite Regions of Various Geometries", *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) 20 (1914), p. 185, sowie des Verfassers Vortrag, *Madison Colloquium*, 1913, Lecture II, p. 137.

Die Begriffe, womit man hier zu tun hat, sind im wesentlichen in Kleins Erlanger Programm, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, 1872, enthalten. Sie sind wohl zum ersten Male durch Bôcher, *Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*, 1894, Kap. 2, explizite dargestellt worden.

eindeutige Beziehung der Punkte der Ebene definiert.[1]) Dabei treten indessen zwei Klassen von Ausnahmepunkten auf:

a) für die auf der Geraden

$$aw + bz + c = 0 \tag{1}$$

gelegenen Punkte ist die Transformation (A) sinnlos;

b) kein Punkt der Ebene wird durch die Transformation (A) in einen Punkt (w', z') der Geraden

$$Aw' + Bz' + C = 0 \tag{2}$$

übergeführt.

Sei (w_0, z_0) ein Punkt der Geraden (1). Nähert sich der veränderliche Punkt (w, z) diesem Punkte, ohne die Gerade dabei jemals zu betreten, so wird im allgemeinen sowohl w' als z' unendlich, und stets wird dies mindestens für eine dieser Variabelen der Fall sein.

Auf Grund dieses Sachverhalts fügt man nun in der Geometrie zu den bisher betrachteten eigentlichen Punkten der Ebene noch neue *ideale* Punkte hinzu, welche dann *die unendlich ferne Gerade, als Punktreihe aufgefaßt,* bilden. So entsteht denn eine erweiterte Ebene, deren Elemente aus der Gesamtheit der vorbezeichneten eigentlichen und uneigentlichen (idealen) Punkte besteht, wobei nun auch die Transformation (A), etwa durch Einführung homogener Variabelen[2]), so erweitert wird, daß sie für die idealen Punkte noch einen Sinn hat und diese erweiterte Ebene, als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßt, ausnahmslos umkehrbar eindeutig in sich selbst überführt.

Die also erweiterte Ebene nennt man, mit vollem Bewußtsein des Umstandes, daß eine Gruppe vorhanden ist, deren Operationen die Punkte dieser Ebene zu Operanden haben, die *projektive Ebene* oder wohl auch, von einem einseitigen Gesichtspunkte aus, *die erweiterte Ebene der analytischen Geometrie.*

Die Geometrie der reziproken Radien. In der Geometrie gibt es noch eine zweite wohlbekannte Gruppe, deren Bedürfnisse zu ganz

---

1) Im übrigen werde noch die folgende Beziehung vermerkt:

$$Aw' + Bz' + C = \frac{\Delta}{aw + bz + c}. \tag{i}$$

2) Doch sind die homogenen Koordinaten zu diesem Zwecke keineswegs nötig. In § 18 wird ins Einzelne durchgeführt, wie dies ohne Benutzung derselben geschehen kann.

anderen Festsetzungen hinsichtlich des unendlich fernen Bereiches Anlaß geben — ich meine die Gruppe, welche zur Geometrie der reziproken Radien gehört, und zwar auch unter Zulassung komplexer Koordinaten, wie im vorhin besprochenen Falle.[1]) Hier besteht der unendlich ferne Bereich nicht mehr aus einer Geraden, sondern aus einem *Nullkreis* (vgl. unten).

Zur Erzeugung der genannten Gruppe fügt man zur Gruppe der Bewegungen, der Ähnlichkeitsformationen und der Spiegelungen noch die folgende Transformation hinzu:

$$w' = \frac{w}{w^2 + z^2}, \qquad z' = \frac{z}{w^2 + z^2}. \tag{I}$$

In dieser Geometrie wird als *Kreis* jede Kurve

$$a(w^2 + z^2) + bw + cz + d = 0$$

benannt, wofür nur a, b, c nicht gleichzeitig verschwinden. Insbesondere stellt also die Gleichung

$$(w - w_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

einen Kreis dar, welcher auch aus ersichtlichen Gründen als *Nullkreis* bezeichnet wird.

Als Punkttransformation aufgefaßt definiert (I) eine im allgemeinen ein-eindeutige Beziehung der Ebene auf sich selbst.[2]) Es stellen sich aber wiederum zwei Klassen von Ausnahmepunkten ein, und zwar sind das

a) die Punkte des Nullkreises

$$w^2 + z^2 = 0, \tag{3}$$

wofür die Transformation (I) versagt;

b) die Punkte, welche durch die Transformation (I) in Punkte (w', z') übergehen sollten, wofür

$$w'^2 + z'^2 = 0$$

ist. Da nämlich

$$w'^2 + z'^2 = \frac{1}{w^2 + z^2} \tag{4}$$

1) Die Geometrie der reziproken Radien, wobei nur reelle Punkte zugelassen werden, kommt für uns an dieser Stelle nicht in Betracht.

2) Eine der Relation i) analoge Beziehung ist hier folgende:

$$w' + iz' = \frac{1}{w - iz}, \qquad w' - iz' = \frac{1}{w + iz}.$$

ist, so sind offenbar keine solchen Punkte vorhanden. Aus (4) geht auch hervor, daß, wenn der Punkt (w, z) einem Punkte (w_0, z_0) des Nullkreises (3) zustrebt, ohne jemals mit einem Punkte dieser Mannigfaltigkeit zusammenzufallen, der Bildpunkt (w', z') ins Unendliche rückt.

Um die genannten Ausnahmen zu beseitigen, führt man wieder ideale Punkte ein, welche dann den *unendlich fernen Bereich* bilden, und zwar geschieht das so, daß dieselben einen (uneigentlichen) Nullkreis ausmachen. Die also erweiterte Ebene, als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßt, wird nun durch jede Transformation der Gruppe ausnahmslos ein-eindeutig in sich selbst übergeführt.

Zwei Kreise schneiden sich jetzt im allgemeinen in zwei getrennten Punkten. Insbesondere können sie sich aber sowohl in einem einzigen Punkte treffen als auch längs einer ganzen Nullgeraden zusammenfallen. Die Kreispunkte der projektiven Ebene sind nicht vorhanden, da es hier eben keinen festen Punkt gibt, durch welchen alle Kreise hindurchgehen. Die gewöhnlichen Geraden der Ebene lassen sich im allgemeinen als diejenigen Kreise charakterisieren, welche durch einen bestimmten unendlich fernen Punkt, nämlich durch den dem Anfang $(0, 0)$ vermöge (I) entsprechenden Punkt, hindurchgehen.[1])

Im übrigen ist diese Geometrie holoedrisch isomorph mit der Geometrie auf einer nicht-singulären Fläche zweiten Grades im Raume von drei Dimensionen gegenüber solchen Kollineationen des Raumes, welche diese Fläche in sich überführen.[2])

Der Raum der Funktionentheorie. Es liegt nun nahe, im Anschluß an den Fall $n = 1$ und die erweiterte Argandsche Ebene, den Raum der n Argumente $(z_1, \ldots, z_n)$ einer Funktion von n Veränderlichen mit Weierstraß dadurch zu erweitern, daß man jeder einzelnen Veränderlichen ihre erweiterte Ebene bzw. die zugehörige Neumannsche Kugel zuweist. Der *unendlich ferne Bereich* besteht hier aus denjenigen Punkten $(z_1, \ldots, z_n)$, wofür mindestens

1) Die eigentlichen Nullgeraden

$$w \pm iz + d = 0$$

bilden eine Ausnahme.

2) Klein a. a. O.; ferner Bôcher a. a. O., sowie auch Fricke-Klein, *Automorphe Funktionen*, Bd. I, Kap. 1. Zur Einführung in diesen Gedankenkreis ist die Bôchersche Arbeit besonders geeignet.

eine Koordinate z_k dem Punkte $z_k = \infty$ entspricht. Er umfaßt ∞^{2n-2} komplexe Punkte, wovon ∞^{n-1} reell sind.

Die zugehörige Gruppe wird durch die Transformationen definiert:

$$z'_k = \frac{\alpha_{kl} z_l + \beta_{kl}}{\gamma_{kl} z_l + \delta_{kl}}, \qquad \alpha_{kl}\delta_{kl} - \beta_{kl}\gamma_{kl} \neq 0, \tag{G}$$

wobei k, l unabhängig voneinander die Werte $1, 2, \ldots, n$ gerade einmal durchlaufen und die Koeffizienten beliebige komplexe Konstanten sind.

Durch jede Transformation von (G) wird der also erweiterte Raum der Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$, als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßt, ein-eindeutig in sich selbst übergeführt. Umgekehrt subsumiert sich auch jede derartige Transformation dieses Raumes in sich, welche durch analytische Funktionen geliefert wird, der Formel (G), wie denn auch später einmal bewiesen werden soll.

Dieser erweiterte Raum der n Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$ möge, mit Rücksicht auf die zugehörige Gruppe (G), der *Raum der Funktionentheorie* oder wohl auch der *Raum der Analysis* benannt werden.[1] Im Falle $n = 2$ deckt sich dieser Raum (wenn man von allen Realitätsfragen absieht) mit dem Raume der Geometrie der reziproken Radien.

§ 18. Fortsetzung. Funktionen im erweiterten Raume.

Die nachstehenden Definitionen gelten allgemein für jeden der vorhin besprochenen Räume, sowie auch für später zu besprechende Räume ähnlichen Charakters. Selbstverständlich bedürfen sie in jedem Einzelfalle einer strengen Rechtfertigung. Für den Raum der Funktionentheorie liegt eine solche Rechtfertigung auf der Hand, und auch für den projektiven Raum bieten sich hier angesichts der späteren Erörterungen dieses Paragraphen keine Schwierigkeiten dar.

Unter der *Umgebung, Nähe* oder *Nachbarschaft* eines unendlich fernen Punktes $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ versteht man diejenigen Punkte, und zwar sowohl die eigentlichen als auch die uneigentlichen, welche den Punkten einer Umgebung eines endlichen Punktes $(a'_1, \ldots, a'_n)$ entsprechen, wenn man vermöge einer bestimmten

1) Man vgl. *Transactions Amer. Math. Soc.* 13 (1912), S. 159, sowie *Madison Colloquium*, 1913, S. 137.

Transformation der Gruppe den Punkt (a) in den Punkt (a') überführt.[1])

Sei $M = \{(z_1, \ldots, z_n)\}$ eine Punktmenge des erweiterten Raumes und sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein unendlich ferner Punkt desselben. Dann heißt (a) eine *Häufungsstelle* von M, falls es in jeder Nachbarschaft von (a) einen von (a) verschiedenen Punkt von M gibt.

Die Definitionen *abgeschlossen* und *perfekt* liegen jetzt auf der Hand. Und nun ist es eine Haupteigenschaft eines erweiterten Raumes, daß die Gesamtheit der Punkte desselben sowohl eine abgeschlossene als auch eine perfekte Menge bilden. Hieraus geht denn auch folgender Satz ohne weiteres hervor.

Satz. *Jede unendliche Punktmenge des erweiterten Raumes besitzt mindestens eine Häufungsstelle.*

Die Funktionentheorie im Raume der Analysis. Wir wollen uns zuerst auf diesen Raum beschränken. Sei $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche in allen eigentlichen Punkten der Umgebung eines unendlich fernen Punktes $(a_1, \ldots, a_n)$ definiert ist. Dann *bleibt* F *endlich* in (a), falls die bewußte Umgebung so gewählt werden kann, daß F im genannten Bereiche endlich bleibt.

Die Funktion F *nähert sich einem Grenzwert*, A, beim Grenzübergang $\lim (z) = (a)$, falls es zu jedem ε eine Umgebung von (a) gibt, in deren eigentlichen Punkten die Relation statthat:

$$|A - F(z_1, \ldots, z_n)| < \varepsilon.$$

Die Funktion F heißt *im Punkte* (a) *stetig*, falls sie dort einem Grenzwert zustrebt. Sie heißt in einem von einem Teile des unendlich fernen Bereiches durchsetzten Gebiete stetig, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes stetig ist. Man beweist nun leicht den folgenden

1) Die genannte Rechtfertigung besteht nun im Nachweise folgenden Satzes: Sind $(a') = (a'_1, \ldots, a'_n)$ und $(a'') = (a''_1, \ldots, a''_n)$ zunächst zwei endliche Punkte, in welche der vorgelegte unendlich ferne Punkt (a) bzw. durch die Transformationen S' und S'' der Gruppe übergeführt wird, und ist T' eine beliebige Nachbarschaft von (a'), so wird jede genügend kleine Umgebung T'' von (a'') durch die Transformation $S' S''^{-1}$ (wobei S''^{-1} zuerst ausgeübt werde) ganz in T' zu liegen kommen. Allgemein dürfen (a') und (a'') zwei beliebige Punkte, S' und S'' zwei beliebige, den Punkt (a) in (a') bzw. (a'') überführende Transformationen sein. Und nun wird dieser Sachverhalt selbst dann noch bestehen bleiben, wenn einer der Punkte (a'), (a'') oder auch beide im Unendlichen liegen.

Satz. *Sei $F(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte eines unendlich ferne 'unkte enthaltenden Bereiches T stetig. In jedem der uneigentlichen 'unkte von T werde die Definition von F dadurch ergänzt, daß der 'unktion dort ihr Grenzwert beigelegt wird. Transformiert man nun ie Umgebung eines unendlich fernen Punktes von T ins Endliche,) wird F im neuen Bereiche im gewöhnlichen Sinne stetig sein.*

Des weiteren heißt die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ *im uneigent-chen Punkte* (a) *analytisch*, falls es möglich ist, eine Umgebung on (a) so zu bestimmen, daß F in jedem eigentlichen Punkte der-elben analytisch ist und außerdem daselbst endlich bleibt. Es wird päter gezeigt, und zwar auf Grund des verallgemeinerten Rie-iannschen Satzes bezüglich hebbarer Unstetigkeiten, daß F dann ı jedem Punkte einer geeigneten Umgebung von (a) stetig ist, so-ie daß, wenn der Funktion in den uneigentlichen Punkten der-elben ihr Grenzwert beigelegt wird, eine erweiterte Funktion ierdurch entsteht, welche, bei der Transformation jener Umge-ung auf ein endliches Gebiet vermöge einer Transformation der ezüglichen Gruppe, in eine im letztgenannten Bereiche analy-sche Funktion übergeht.

Die vorstehenden Definitionen weichen gewissermaßen davon b, was man mit Rücksicht auf die Dirichletsche Auffassung einer 'unktion erwarten könnte. *A priori* sieht man nicht ein, warum ie vorgelegte Funktion nicht von vornherein auch in den Punk-en des unendlich fernen Bereiches definiert werden soll. Ein olcher Vorgang entspricht aber nicht den Bedürfnissen der Pra-is. Nur dann, wenn die vorgelegte, zunächst bloß in eigentlichen unkten definierte Funktion in einem uneigentlichen Punkte einem renzwerte zustrebt, ist es angezeigt, die Funktion dort zu er-lären.

Die Funktionentheorie im projektiven Raume. Es wäre ein Irr-um, zu glauben, daß die vorhin besprochene Weise, den unend-ch fernen Bereich in der Funktionentheorie einzuführen, die lein zulässige sei. Es möge eine beliebige Geometrie vorgelegt ein, deren Elemente zunächst aus den eigentlichen komplexen unkten $(z_1, \ldots, z_n)$ bestehen, und die Transformationen deren ruppe je eine im allgemeinen ein-eindeutige analytische Bezie-ung dieser Punktmannigfaltigkeit auf sich selbst definieren. Da-ei mögen die einer beliebigen Transformation entsprechenden Aus-ahmepunkte nur eine Mannigfaltigkeit niederer Dimension bilden.

Wir denken uns diese Mannigfaltigkeiten ferner in der Nähe eines beliebigen endlichen Punktes (a) in der Form darstellbar:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo G sich im Punkte (a) analytisch verhält und dort verschwindet, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Und endlich soll es gelungen sein, durch Einführung idealer Elemente und entsprechende Erweiterung jeder Transformation der Gruppe diese Ausnahmepunkte zu beseitigen. Dann kann man auch die Funktionentheorie an der Hand der bewußten Gruppe auf diesen erweiterten Raum ausdehnen. Denken wir uns dieses Verfahren für den Fall des projektiven Raumes noch durch. Dabei genügt es, $n = 3$ vorauszusetzen.

Hier besteht die Gruppe aus den Transformationen

$$\text{(H)} \qquad z_i' = \frac{c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + c_{i3}z_3 + c_{i4}}{c_{41}z_1 + c_{42}z_2 + c_{43}z_3 + c_{44}}, \qquad i = 1, 2, 3;$$

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} \neq 0.$$

Für die Punkte der Ebene

$$c_{41}z_1 + c_{42}z_2 + c_{42}z_3 + c_{44} = 0$$

hat die Transformation keinen Sinn.

Wir wollen nun ideale Punkte, wie folgt, einführen. Sei $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ ein beliebiger Punkt, und man fasse die Punkte

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

ins Auge, wobei λ alle endlichen komplexen Werte annimmt. Jetzt fügen wir zu diesen Punkten noch einen idealen Punkt hinzu. Derselbe wird durch den Punkt (a_1, a_2, a_3) völlig bestimmt.

Sei $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ ein zweiter Punkt des Raumes. Existiert dann ein Zahl ϱ derart, daß

$$b_1 = \varrho a_1, \qquad b_2 = \varrho a_2, \qquad b_3 = \varrho a_3$$

ist, so soll der diesem Punkte entsprechende ideale Punkt mit dem ersten idealen Punkte identisch sein, sonst aber nicht.

So bilden denn die idealen Punkte eine Mannigfaltigkeit von der $2(n-1) = 4$-ten Dimension. Ferner entspricht den eigentlichen Punkten der Geraden

$$\text{(5)} \qquad z_1 = \lambda a_1, \qquad z_2 = \lambda a_2, \qquad z_3 = \lambda a_3,$$

wobei nur $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ und auch $\lambda \neq 0$ ist, und nur diesen Punkten, ein und derselbe ideale Punkt. Wir wollen also diesen idealen Punkt als einen Punkt jener Geraden definieren und ihm auch den Punkt $\lambda = \infty$ zuordnen. Daher liegt es nahe, jeden idealen Punkt als einen unendlich fernen Punkt zu benennen und etwa durch das Symbol $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_{\lambda=\infty}$ oder kürzer durch $(a_1, a_2, a_3)_\infty = (a)_\infty$ zu bezeichnen. Zur Darstellung eines solchen Punktes genügt ein beliebiger, vom Anfang verschiedener Punkt der entsprechenden Geraden (5).

Unter der *Umgebung* eines unendlich fernen Punktes $(a_1, a_2, a_3)_\infty$ versteht man die Punkte

$$(\lambda a'_1, \lambda a'_2, \lambda a'_3),$$

wofür $(a'_1, a'_2, a'_3) \neq (0, 0, 0)$ ein beliebiger Punkt der Umgebung von (a) und λ ein beliebiger Punkt der Umgebung der Stelle $\lambda = \infty$ sind.

Eine Funktion $F(z_1, z_2, z_3)$ heißt im unendlich fernen Punkte $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_{\lambda=\infty}$ *analytisch*, wenn es eine bestimmte Umgebung dieses Punktes gibt, in deren eigentlichen Punkten F sich analytisch verhält und absolut genommen unter einer festen Zahl bleibt. Dann nähert sich F einem Grenzwert in jedem uneigentlichen Punkte dieser Umgebung, wie aus dem Riemannschen Satze bezüglich des Verhaltens einer Funktion in der Nähe einer hebbaren Unstetigkeit, Kap. 3, § 3 hervorgeht. Legt man der Funktion noch in den uneigentlichen Punkten der bewußten Umgebung den betreffenden Grenzwert bei und projiziert man diesen Bereich ins Endliche, so wird sich die transformierte Funktion im transformierten Punkte analytisch verhalten.[1])

Schlußbemerkungen. Im Falle $n = 2$ ist die Geometrie der reziproken Radien holoedrisch isomorph mit der Geometrie der Ebene der Funktionentheorie[2]), dagegen ist sie von der ebenen projektiven Geometrie völlig verschieden, indem keine ein-eindeu-

1) Wir haben mit Absicht den Gebrauch der homogenen Koordinaten hier vermieden, denn diese verschleiern nur die eigentliche Sachlage. Erst nachdem die Definitionen nebst ihrer Rechtfertigung klar sind, welche der Einführung der unendlichen Punkte zugrunde liegen, darf man sich mit gebührender Achtung vor dem eigenen Geiste den homogenen Koordinaten anvertrauen. Diese müssen der Funktionentheorie entbehrlich sein und nur als ein eleganter Formalismus zugelassen werden.

2) Bôcher, Fricke-Klein, a. a. O.

tige reguläre Beziehung zwischen den Punkten ihrer Ebene und den Punkten der projektiven Ebene möglich ist. Dies erhellt schon daraus, daß die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kreise in den beiden Geometrien verschieden ausfällt.

Ist $n \geqq 3$, so sind alle drei erweiterten Räume wesentlich voneinander verschieden.

Im Falle $n = 1$ wurde der ganze unendlich ferne Bereich (der Punkt $z = \infty$) durch eine geeignete Transformation der Gruppe ins Endliche projiziert. Sobald dagegen $n > 1$ ist, trifft dies in den drei vorstehenden Geometrien nicht mehr zu. Eine jede Transformation der Gruppe führt mindestens einen unendlich fernen Punkt in einen zweiten solchen über.

Für höhere Werte von n gibt es nicht nur die drei soeben besprochenen Fälle. Man kann auch daraus zusammengesetzte Fälle bilden, indem man die Variabelen in zwei oder drei Klassen einteilt und diejenigen ein und derselben Klasse nach der Gruppe einer der obigen Geometrien transformiert. So hätte man etwa im Falle $n = 3$ die Gruppe

$$x' = \frac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c}, \qquad y' = \frac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c}, \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

$$\Sigma \pm ab'c'' \neq 0, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Diese Gruppe entspricht der Theorie der Funktionen zweier Argumente in der Ebene der projektiven Geometrie. Der zugehörige Raum besteht aus den eigentlichen Punkten des gewöhnlichen komplexen Raumes, $n = 3$, wozu noch die Punkte eines unendlich fernen Bereiches hinzugefügt werden, und zwar so, daß die Punkte des erweiterten Raumes in umkehrbar eindeutiger Beziehung mit den Punktepaaren $\{z, (x, y)\}$ stehen, wo z die Neumannsche z-Kugel durchläuft, während (x, y) der projektiven Ebene angehört.

In der Geometrie bilden meist die Elemente, welche man als Operanden der Gruppe zugrunde legt, eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit. Vom Standpunkte der Analysis aus trifft eine solche Auffassung indessen nicht stets zu — eine Behauptung, wofür die homogenen Koordinaten des nächsten Paragraphen ja bereits ein Beleg sind, da der Raum letzterer eben ein offener ist.

Demgemäß darf man die soeben erwähnten zusammengesetzten Fälle nicht zu eng fassen. So könnte man insbesondere das obige

Beispiel etwa dahin abändern, daß man die dritte Gleichung durch folgende:

$$z' = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \neq 0,$$

ersetzt. Auch könnte man eine Reihe der Variabelen als homogene Veränderlichen (§ 19) einführen.

In der Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Argumente nebst den zum algebraischen Gebilde gehörigen Integralen ist die Frage der zugrunde gelegten Gruppe und somit des unendlich fernen Bereiches von prinzipieller Bedeutung.

§ 19. Über homogene Koordinaten.[1]

In der Geometrie legt man ein abgeschlossenes System von Elementen, $\mathfrak{M}$, zugrunde[2], wie z. B. die Punkte eines Punktraumes nebst den idealen Punkten des unendlich fernen Bereichs desselben, oder auch die Strahlen eines Strahlbüschels. Diese Elemente lassen sich nicht, wie die eigentlichen Punkte des gewöhnlichen Raumes, in ein-eindeutiger stetiger Weise durch Zahlenkomplexe darstellen, wofür der erweiterte Punktraum eben einen Beleg liefert.

Um dem abzuhelfen, führt man homogene Koordinaten ein. So setzt man beispielsweise im Falle eines projektiven Punktraumes, $R = R_n$, dessen Punkte aus den eigentlichen Punkten $(x_1, \ldots, x_n)$ des gewöhnlichen komplexen n-dimensionalen Raumes nebst den idealen unendlich fernen Punkten bestehen,

$$x_k = \frac{\xi_k}{\xi_0}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Hierdurch entsteht eine Beziehung zwischen den sämtlichen Punkten des erweiterten R_n und den Punkten einer zweiten Man-

---

1) Der erste Teil dieses Paragraphen wird im einzelnen für den Leser, welcher von den algebraischen Funktionen und ihren Integralen, sowie von der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch nichts weiß, nicht verständlich sein. Immerhin wird er jetzt schon gewisse Eindrücke dem Texte entnehmen können, welche dann durch eine spätere Lektüre noch verschärft werden.

Der gänzliche Mangel derartiger Auseinandersetzungen in der Literatur ist schuld daran, daß die homogenen Variabelen den Analytikern unsympathisch geblieben sind. Klein, *Math. Annalen* 36 (1890), S. 6, hat zwar gesagt, daß man die homogenen Variabelen als gewöhnliche Variabelen in einem höheren Raume auffassen kann, und dabei hat er es denn bewenden lassen.

2) Hier ist von dem Vorgehen die Rede, dessen sich beispielsweise v. Staudt in der projektiven Geometrie bediente.

nigfaltigkeit, nämlich der Gesamtheit der Punkte $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit alleiniger Ausnahme des Punktes $(0, 0, \ldots, 0)$ und ohne Erweiterung durch uneigentliche, — die sogenannten unendlich fernen, — Punkte. Dieser letzte Punktraum werde mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{n+1}$ bezeichnet.

Die reine Geometrie beschäftigt sich mit Gebilden $\mathfrak{G}$, welche aus einem Teil der Elemente von $\mathfrak{M}$ bestehen, wie z. B. die Geraden der Ebene und die Flächen 2. Grades des Raumes. Den Punkten dieser Gebilde entsprechen dann, im soeben erwähnten projektiven Falle $\mathfrak{M} = R_n$, in $(1, \infty)$-vieldeutiger Weise Punkte von Gebilden im Raume $\mathfrak{R}_{n+1}$. So schneidet man denn in der Geometrie aus dem Ganzen, $\mathfrak{M}$, einen Teil, $\mathfrak{G}$, heraus.

Ein wesentlich neuer Gedanke entwickelte sich im Anschluß an Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Riemann hatte nämlich den Begriff einer Funktion an einem vorgelegten Gebilde in den Vordergrund gerückt. Das Gebilde besteht hier vornehmlich aus einer algebraischen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$, und zwar inklusive des unendlich fernen Bereichs. Letzterer setzt sich aus einer endlichen Anzahl von Punkten zusammen. Wie man sieht, entsteht so eine enge Analogie zwischen der Grundfläche $\mathfrak{F}$, als geometrisches Substrat betrachtet, und dem Bereiche der unabhängigen Variabelen in der Analysis, d. h. dem Definitionsbereiche einer Funktion.

Diesen Gedanken nahmen Aronhold[1]) und Clebsch und Gordan[2]) auf, und er wurde später von Klein[3]) zu einem Hauptgesichtspunkte gemacht, indem diese Forscher *Funktionen an homogenen Gebilden* betrachteten. Als erstes Beispiel seien die ebenen algebraischen Kurven erwähnt, welche zu algebraischen Gebilden im komplexen $\mathfrak{R}_3$ der homogenen Koordinaten Anlaß gaben. Sodann gab es Noethers Normalkurve im projektiven R_{p-1}, welche zu einem algebraischen Gebilde im Raume $\mathfrak{R}_p$ der homogenen Variabelen führt. In beiden Fällen sind die homogenen Gebilde *Flächen* im Sinne der algebraischen Geometrie, also reell 4-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Wir erwähnen weiter die Kleinsche Behandlung der Theorie

---

1) *Journ. f. Math.* 61 (1862), S. 95. Vgl. auch *Encyklopädie* II B 2, S. 137.

2) *Abelsche Integrale*, 1866.

3) Man vergleiche etwa die soeben zitierte Abhandlung aus den *Math. Annalen*, sowie die Bände über *elliptische Modul-* und *automorphe Funktionen*, welche Klein und Fricke gemeinsam herausgegeben haben.

der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie der automorphen Funktionen. Hier wird die eine unabhängige Variabele der gewöhnlichen Analysis, x, durch homogene Veränderliche ersetzt:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

und auch die abhängige Variabele y wird homogen gemacht:

$$y = \frac{y_1}{y_2}.$$

Hiermit verläßt man die projektive Geometrie, indem die durch die Funktion

$$y = f(x)$$

definierte Kurve der gewöhnlichen Ebene der analytischen Geometrie jetzt als eine Kurve einer erweiterten Ebene betrachtet wird, welch letztere aber nicht als die projektive Ebene, sondern als die Ebene der Funktionentheorie sich einstellt.[1])

Nachdem wir soviel über das Wesen der homogenen Variabelen vorausgeschickt haben, wenden wir uns jetzt zur Einführung derselben in den einfachsten Fällen, sowie zum 1. Hauptsatze, worauf ihre Einführung beruht.

a) *Der projektive Raum.* Diesen Fall haben wir bereits besprochen. Sind $x_1, \ldots, x_n$ die gewöhnlichen komplexen Koordinaten eines eigentlichen Punktes desselben, so besteht die $(1, \infty)$-vieldeutige Transformation in den Gleichungen

$$(\mathrm{a}_1) \qquad x_k = \frac{\xi_k}{\xi_0}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Einem uneigentlichen Punkte $(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)_{\lambda=\infty}$ ordnet man jeden Punkt (ξ) zu, wofür

$$\xi_0 = 0, \qquad \xi_k = \lambda a_k, \qquad \lambda \neq 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Demgemäß besteht durchweg die Nebenbedingung

$$0 < |\xi_0| + |\xi_1| + \cdots + |\xi_n|.$$

1) Dieser Gedanke, eine Kurve der gewöhnlichen Ebene der komplexen analytischen Geometrie als eine Kurve der Ebene der Funktionentheorie aufzufassen, tritt bereits bei Riemann auf; Theorie der Abelschen Funktionen, *Journ. f. Math.* 54 (1857), S. 124 = *Werke,* 1. Aufl. S. 103; 2. Aufl. S. 110. Andererseits findet der analytische Vorgang sein Gegenstück in den *Korrespondenzen* der algebraischen Geometrie.

An Stelle der Gruppe

(a₂) $$x_k' = \frac{c_{k0} + c_{k1} x_1 + \cdots + c_{kn} x_n}{c_{00} + c_{01} x_1 + \cdots + c_{0n} x_n}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\sum \pm c_{00} c_{11} \ldots c_{nn} \neq 0,$$

tritt nun die Gruppe

(a₃) $$\xi_k' = c_{k0} \xi_0 + c_{k1} \xi_1 + \cdots + c_{kn} \xi_n, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

b) *Der Raum der Funktionentheorie.* Hier wird die Transformation im Falle eines eigentlichen Punktes durch die Gleichungen gegeben:

(b₁) $$z_k = \frac{\zeta_k}{\zeta_k'}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Einem uneigentlichen Punkte, wofür $z_{k_i} = \infty$, $i=1,\ldots,l$, ordnet man jeden Punkt (ζ) zu, wofür

$$\zeta_{k_i}' = 0, \qquad i = 1, \ldots, l,$$

ist, während (b₁) statt hat, falls $k \neq k_i$ ist. Es bestehen hier die n Nebenbedingungen

$$0 < |\zeta_k| + |\zeta_k'|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

An Stelle der Gruppe

(b₂) $$z_i' = \frac{\alpha_k z_k + \beta_k}{\gamma_k z_k + \delta_k}, \qquad i, k = 1, \ldots, n, \; i \neq k,$$

$$\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k \neq 0,$$

tritt nun die Gruppe

(b₃) $$\begin{cases} Z_i = \alpha_k \zeta_k + \beta_k \zeta_k', \\ Z_i' = \gamma_k \zeta_k + \delta_k \zeta_k'. \end{cases}$$

c) *Die zusammengesetzten Räume.* Jetzt ist klar, wie man hier vorzugehen hat. So wird man im Beispiele des vorhergehenden Paragraphen

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \qquad y = \frac{\xi_2}{\xi_0}, \qquad z = \frac{\zeta}{\zeta'}$$

zu setzen haben. Dabei geht die Gruppe in folgende über:

$$\begin{cases} \xi_0' = a\,\xi_1 + b\,\xi_2 + c\,\xi_0 \\ \xi_1' = a'\xi_1 + b'\xi_2 + c'\xi_0 \\ \xi_2' = a''\xi_1 + b''\xi_2 + c''\xi_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z = \alpha\zeta + \beta\zeta', \\ Z' = \gamma\zeta + \delta\zeta'. \end{cases}$$

Bezüglich solcher Räume werden die homogenen Variabelen stets so eingeführt, daß die folgenden Sätze gelten.

1. Hauptsatz.[1]) *Sei F eine Funktion, welche sich in einem Punkte P des vorgelegten erweiterten Raumes R analytisch bzw. meromorph*[2]) *verhält, und sei Q ein Punkt des Raumes $\mathfrak{R}$ der homogenen Variabelen, welcher P entspricht. Dabei darf P sowohl ein eigentlicher als auch ein uneigentlicher Punkt sein, Q kann aber nur ein eigentlicher Punkt sein.*

Alsdann geht F in eine Funktion Φ im Raume $\mathfrak{R}$ über, welche sich in Q analytisch bzw. meromorph verhält, und zwar im ursprünglichen Sinne des Wortes, da Q eben ein eigentlicher Punkt ist.

Beginnen wir mit dem Falle des projektiven Raumes und setzen wir der Kürze halber $n = 2$. Sei ferner P ein uneigentlicher Punkt, da der Satz sonst offenbar richtig ist. Vermöge einer Transformation

$$(1)\qquad X_k = \frac{c_{k0} + c_{k1} x_1 + c_{k2} x_2}{c_{00} + c_{01} x_1 + c_{02} x_2}, \qquad k = 1, 2,$$

werde der Punkt P in einen endlichen Punkt P_1 übergeführt. Dabei geht die vorgelegte Funktion F nach Voraussetzung in eine Funktion $\bar{F}(X_1, X_2)$ über, welche sich in der Nähe von P_1 in der Form darstellen läßt:

$$\bar{F}(X_1, X_2) = \frac{G(X_1, X_2)}{H(X_1, X_2)},$$

wo G, H sich beide im Punkte P_1 analytisch verhalten.[3])

Wir führen jetzt eine Funktion Φ der homogenen Variabelen ein, indem wir jedem Punkte (ξ_0, ξ_1, ξ_2), welcher einem Punkte der Umgebung von P entspricht, den Wert der Funktion F dort zuordnen, sofern F dort definiert ist:

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = F = \bar{F}(X_1, X_2).$$

---

1) Der 2. Hauptsatz wird erst in Kap. 3, § 30 besprochen.

2) Eine Funktion verhält sich *meromorph* in einem Punkte, wenn sie sich als das Verhältnis zweier sich im Punkte analytisch verhaltenden Funktionen ausdrücken läßt.

3) Die eigentliche Funktion $F(x_1, x_2)$ geht in eine Funktion $F_1(X_1, X_2)$ über, welche hebbare Singularitäten in der Nähe von P_1 aufweisen kann. Und nun liefert die ergänzte Funktion F_1 die Funktion $\bar{F}$. Diese Ausnahmewerte, sofern welche vorhanden sind, sind geradezu die Werte der ursprünglichen Funktion in den unendlich fernen Punkten der Umgebung von P.

Ein dem Punkte P zugehöriger Punkt Q sei $(\xi) = (\alpha)$, wobei $\alpha_0 = 0$ ist. Dann ist

$$(2) \qquad c_{00}\alpha_0 + c_{01}\alpha_1 + c_{02}\alpha_2 \neq 0, \qquad \text{also} \qquad c_{01}\alpha_1 + c_{02}\alpha_2 \neq 0.$$

In der Tat sei P ein Punkt $(\lambda a_1, \lambda a_2)_{\lambda=\infty}$. Dann darf man $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$ setzen. Demgemäß hat P_1 die Koordinaten

$$\lim_{\lambda=\infty} X_k = \lim_{\lambda=\infty} \frac{c_{k0} + \lambda(c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2)}{c_{00} + \lambda(c_{01}a_1 + c_{02}a_2)}, \qquad k = 1, 2.$$

Würde nun

$$c_{01}\alpha_1 + c_{02}\alpha_2 = 0$$

sein, so müßte auch

$$c_{k1}\alpha_1 + c_{k2}\alpha_2 = 0, \qquad k = 1, 2,$$

da P_1 ja im Endlichen liegen soll. Dies hätte aber das Verschwinden der Determinante der Transformation zur Folge.

Des weiteren ist wegen (a_1) und (1)

$$X_k = \frac{c_{k0}\xi_0 + c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2}{c_{00}\xi_0 + c_{01}\xi_1 + c_{02}\xi_2}, \qquad k = 1, 2.$$

Diese Funktionen verhalten sich wegen (2) analytisch im Punkte $(\xi) = (\alpha)$. Demgemäß gehen G und H in Funktionen über:

$$G(X_1, X_2) = \Gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2), \qquad H(X_1, X_2) = \mathrm{H}(\xi_0, \xi_1, \xi_2),$$

welche sich beide im Punkte $(\xi) = (\alpha)$ analytisch verhalten, und hiermit ist der Beweis erbracht.

In allen anderen Fällen, wie z. B. beim Raume der Funktionentheorie, geht man in ähnlicher Weise vor und stellt so den Beweis her.

§ 20. **Der Laurentsche Satz.**

Sei S ein regulärer, mit zwei Randkurven C_1, C_2 versehener Bereich der w-Ebene, und sei T ein ebensolcher, von Γ_1 und Γ_2 berandeter Bereich der z-Ebene. Dabei liege C_1 innerhalb C_2, und ebenso Γ_1 innerhalb Γ_2. Sei ferner $f(w, z)$ im Zylinderbereiche (S, T) analytisch und am Rande desselben stetig. Stellt man nun f durch die Cauchysche Integralformel dar, so kommt:

$$f(w, z) = f_{C_1\Gamma_1}(w, z) + f_{C_2\Gamma_1}(w, z) + f_{C_1\Gamma_2}(w, z) + f_{C_2\Gamma_2}(w, z),$$

wobei

$$f_{C_i\Gamma_j}(w, z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{dt}{t-z}\int\limits_{C_i} \frac{f(s, t)\,ds}{s-w}, \qquad i, j = 1, 2.$$

Der außerhalb C_1 gelegene Teil der w-Ebene werde mit S_1, der innerhalb C_2 gelegene Teil mit S_2 bezeichnet; und ebenso mögen in der z-Ebene die Bereiche T_1, T_2 erklärt werden. Dementsprechend verhält sich die Funktion $f_{C_i \Gamma_j}$, im Zylinderbereiche (S_i, T_i) analytisch.

Jetzt kann man die Forderung der Stetigkeit am Rande fallen lassen und den Satz auch für diesen Fall, wie unter ähnlichen Umständen, Bd. I, S. 364 geschah, beweisen. Im übrigen darf einer der Bereiche S und T einfach zusammenhängen. Dann stehen rechter Hand nur zwei statt vier Glieder.

Nimmt man insbesondere die Bereiche S, T als Kreisringe an, deren Mittelpunkte in $w = 0$ bzw. $z = 0$ liegen, so gestatten die betreffenden Integrale Potenzreihenentwicklungen, wie folgt:

$f_{C_1\Gamma_1}$	nach	positiven	Potenzen	von	$\frac{1}{w}, \frac{1}{z}$;
$f_{C_2\Gamma_1}$	,,	,,	,,	,,	$w, \frac{1}{z}$;
$f_{C_1\Gamma_2}$	,,	,,	,,	,,	$\frac{1}{w}, z$;
$f_{C_2\Gamma_2}$	,,	,,	,,	,,	w, z.

Endlich dürfen die Kreise C_1, Γ_1 auf die Punkte $w = 0$ bzw. $z = 0$ zusammenschrumpfen, und ebenso dürfen sich die Kreise C_2, Γ_2 auf die ganze w- bzw. z-Ebene ausdehnen.

Diese Entwicklungen übertragen sich ohne weiteres auf Funktionen beliebig vieler Veränderlichen. In den vorhergehenden Sätzen besteht der *Laurentsche Satz* für Funktionen mehrerer Argumente.

Anwendung des Satzes. Wir wollen den Laurentschen Satz gleich zum Beweise eines allgemeinen Theorems anwenden, welches um so frappanter ist, daß es kein Analogon in der Theorie der Funktionen einer Variabelen besitzt.

Satz.[1]) *Ist $f(w, z)$ im Bereiche*

$$\mathfrak{T}: \qquad |w| + |z| > G$$

analytisch, wo G eine feste Zahl bedeutet, und bleibt f dort außerdem endlich, so ist f eine Konstante.

1) *Madison Colloquium*, p. 145.

Zum Beweise stelle man die Funktion im Bereiche

$$G < |z| < \infty, \qquad |w| < \infty$$

in der Form dar:

$$f(w, z) = f_{C_2 \Gamma_1} + f_{C_2 \Gamma_2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) w^k.$$

Dabei verhalten sich die Koeffizienten im Bereiche $G < |z| < \infty$ analytisch. Hier müssen aber zunächst alle Koeffizienten $A_k(z)$, wofür $k > 0$ ist, identisch verschwinden. Sonst sei $A_{k'}(z)$ ein Koeffizient, wofür dies nicht zuträfe, und sei außerdem $A_{k'}(z_0) \neq 0$, $|z_0| > G$. Für große Werte von w bleibt $f(w, z_0)$ aber nach Voraussetzung endlich, und hiermit ist man zu einem Widerspruch geführt. Demgemäß reduziert sich $f(w, z)$ auf eine Funktion von z allein. Bei den Voraussetzungen des Satzes treten aber w und z symmetrisch auf. Daher erweist sich f ebenfalls als eine Funktion von w allein, und hiermit ist der Beweis erbracht. — Der Satz läßt sich auch, wie folgt, formulieren.

Verhält sich eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqq z$, in jedem Punkte des unendlich fernen Bereiches analytisch, wie auch immer dieser Bereich als abgeschlossene Punktmannigfaltigkeit definiert werden möge, so ist f eine Konstante.

§ 21. Analytische Fortsetzung.

Der Begriff der analytischen Fortsetzung, wie er im ersten Bande dieses Werkes, 9. Kapitel, für Funktionen einer Variabelen auseinandergesetzt ist, überträgt sich ohne weiteres auf Funktionen beliebig vieler Argumente. Verhält sich nämlich $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Innern eines $2n$-dimensionalen Bereiches T des Raumes der Variabelen $(z_1, \ldots, z_n)$ analytisch; gibt es ferner einen T umfassenden $2n$-dimensionalen Bereich $\mathfrak{T}$ nebst einer im Innern von $\mathfrak{T}$ analytischen Funktion, welche in den Punkten von T mit f übereinstimmt, so sagt man, f läßt sich über T hinaus *analytisch fortsetzen.* Die erweiterte Funktion, für die nicht zu T gehörigen Punkte von $\mathfrak{T}$ betrachtet, heißt eine *analytische Fortsetzung* von f. Daß es nur eine analytische Fortsetzung von f im genannten Bereiche gibt, folgt aus dem Identitätssatze von § 12.

Allgemeiner seien T, T' zwei übereinandergreifende Bereiche, in denen zwei Funktionen $f(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ sich analytisch verhalten. Stimmen dann f und φ im Innern eines bei-

den Bereichen gemeinsamen Gebietes miteinander überein, so bildet jede derselben eine analytische Fortsetzung der anderen.

Auch die analytische Fortsetzung einer vorgelegten Funktion längs einer bestimmten Kurve findet hier ihre naturgemäße Verallgemeinerung. Ehe wir uns indessen zur näheren Besprechung dieses Begriffs hinwenden, führen wir vorerst gewisse Bereiche ein, welche auch sonst in der Theorie der analytischen Fortsetzung von Wichtigkeit sind.

Definition der Bereiche K. Sei $f(w, z)$ im Punkte (w_0, z_0) analytisch, und sei

$$K_r' : \qquad |w - w_0| < r, \qquad |z - z_0| < r$$

ein im Definitionsbereich von f belegener Kreiszylinderbereich. Dann ist es denkbar, daß f eine analytische Fortsetzung gestattet, derart, daß die neue Funktion sich in einem größeren Bereiche $K_{r'}'$, wofür also $r' > r$ ist, analytisch verhält. Ist f keine ganze Funktion, so sei R die obere Grenze der Zahlen r. Wir können dann den Kreiszylinderbereich $K_R' = K = K_{w_0, z_0}$, als eine Verallgemeinerung des wahren Konvergenzkreises im Falle $n = 1$ ansehen und zu ähnlichen Zwecken benutzen. — Im Falle einer ganzen Funktion soll K aus dem ganzen endlichen Raume bestehen.

Zur Bestimmung der Zahl R kann man sich der Taylorschen Reihenentwicklung bedienen. Setzt man diese in der Form an:

$$f(w, z) = \sum\sum a_{mn} (w - w_0)^m (z - z_0)^n,$$

und schreibt man ferner

$$A_k = \sum |a_{mn}|,$$

wobei die Summe sich auf alle Werte von m, n erstrecken soll, wofür $m + n = k$ ist, so ist R offenbar die obere Grenze derjenigen positiven Zahlen r, wofür die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$$

konvergiert.

Definition der Bereiche $\mathfrak{K}$ *im Raume der Funktionentheorie.* Wir wollen den eigentlichen Raum noch durch einen unendlich fernen Bereich zu einem geschlossenen Bereiche ergänzen. Beginnen wir mit dem Raume der Funktionentheorie.

Ist (w, z) ein Punkt, wofür $|w| \geqq 1$ bzw. $w = \infty$ ist, und übt man die Transformation

$$(\mathrm{A}_1) \qquad w' = \frac{1}{w}, \qquad z' = z$$

aus, so geht (w, z) dadurch in einen Punkt (w', z') über, wofür $|w'| \leqq 1$ ist, während $|z|$ unverändert bleibt.

Ebenso geht ein Punkt (w, z), wofür $|z| \geqq 1$ bzw. $z = \infty$ ist, durch die Transformation

$$(\mathrm{A}_2) \qquad w' = w, \qquad z' = \frac{1}{z}$$

in einen neuen Punkt (w', z') über, wofür $|z'| \leqq 1$ ist, während $|w|$ unverändert bleibt.

Vermöge der beiden Transformationen (A_1) und (A_2) kann man einen beliebigen außerhalb des Bereiches

$$B: \qquad |w| \leqq 1, \qquad |z| \leqq 1$$

belegenen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt (w, z) in einen Punkt von B überführen.

Vom Standpunkte der Gruppentheorie aus kann man den Sachverhalt hier, wie folgt, auffassen. Durch die Transformationen (A_1) und (A_2) wird eine endliche Gruppe erzeugt, deren weitere Transformationen aus der Identität nebst der folgenden bestehen:

$$(\mathrm{A}_3) \qquad w' = \frac{1}{w}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

Und nun erhält man einen Fundamentalbereich für diese Gruppe, indem man die Punkte (w, z) nimmt, wofür

$$|z| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |z| = 1, \qquad 0 \leqq y, \qquad z = x + iy;$$

und ebenso

$$|w| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |w| = 1, \qquad 0 \leqq v, \qquad w = u + iv,$$

ist. Dieser Bereich werde mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Wir sind nunmehr in der Lage, jedem Punkte (w_0, z_0) einen dem früheren K analogen Bereich $\mathfrak{K}$ beizulegen, wie es die Verhältnisse im erweiterten Raume erfordern. Liegt nämlich (w_0, z_0) bereits in $\mathfrak{F}$, so möge $\mathfrak{K}$ geradezu als K erklärt werden. Sonst werde (w_0, z_0) durch eine geeignete Transformation S der Gruppe in $\mathfrak{F}$ gebracht und der zum transformierten Punkte (w_0', z_0') und zur transformierten Funktion $f'(w', z')$ gehörige Bereich K be-

stimmt. Indem man nun K durch die zu S inverse Operation S^{-1} transformiert, entsteht dadurch ein Bereich, welchen wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen.[1])

Im allgemeinen Falle $n = n$ handelt es sich um die Gruppe

$$z_1' = z_1^{i_1}, \qquad z_2' = z_2^{i_2}, \ldots, z_n' = z_n^{i_n},$$

wobei die Exponenten $i_1, i_2, \ldots, i_n$ unabhängig voneinander die Werte $1, -1$ annehmen. Darnach ist die Gruppe von der 2^n-ten Ordnung. Ein zugehöriger Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ besteht aus den Punkten

$$|z_j| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |z_j| = 1, \qquad 0 \leqq y_j, \qquad z_j = x_j + iy_j.$$

§ 22. Fortsetzung. Das Gleiche im projektiven Raume.

Hier kann man sich der Gruppe bedienen, welche durch die beiden folgenden Transformationen erzeugt wird:

$$(\mathrm{A}_1) \qquad w' = \frac{1}{w}, \qquad z' = \frac{z}{w};$$

$$(\mathrm{A}_2) \qquad w' = \frac{w}{z}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

Diese Gruppe entspricht der in homogenen Variabelen geschriebenen Gruppe

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= x_{i_1}, \\ \varrho x_2' &= x_{i_2}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho x_n' &= x_{i_n}, \end{aligned}$$

wobei $i_1, i_2, \ldots, i_n$ eine beliebige Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ vorstellt.[2])

---

1) Für gewisse am Rande von $\mathfrak{F}$ belegene Punkte ist S nicht eindeutig bestimmt. Ist z. B. $w_0 = 1$, $|z_0| > 1$, so könnte man etwa festsetzen, daß S als die Transformation

$$w' = w, \qquad z' = \frac{1}{z},$$

und nicht als

$$w' = \frac{1}{w}, \qquad z' = \frac{1}{z},$$

gewählt werde; d. h. daß nur solche Koordinaten transformiert werden, wofür dies vonnöten ist.

2) Wegen dieser Gruppe vergleiche man Klein, *Math. Annalen* 4 (1871), S. 346; E. H. Moore, *Amer. Journ. of Math.* 22 (1900), p. 336.

Im Falle $n = 3$ schreibt man leicht alle 3! Transformationen in nicht-homogenen Variabelen hin und überzeugt sich dann ohne Mühe, daß ein Fundamentalraum für die Gruppe aus dem Innern nebst einem Teil der Randpunkte des Bereiches

$$|w| \leqq |z| \leqq 1$$

besteht.

Bezeichnet man die homogenen Variabelen für ein beliebiges n mit $w_1, \ldots, w_n$ und faßt man den Bereich

$$H: \qquad |w_1| \leqq |w_2| \leqq \cdots \leqq |w_n|, \qquad \sum_{k=1}^{n} |w_k| > 0$$

ins Auge, so liefern die inneren Punkte von H, d. h. die Punkte, wofür stets das Ungleichheitszeichen gilt, eben die inneren Punkte eines Fundamentalbereiches $\mathfrak{G}$ im Raume der homogenen Variabelen. Die Randpunkte von H werden erhalten, wenn mindestens ein Gleichheitszeichen gilt. Sie sind mithin diejenigen Punkte von H, welche auf einem der Gebilde

$$|w_i| = |w_{i+1}|, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,n-1}$$

liegen. Im übrigen sei noch bemerkt, daß stets $|w_n| > 0$ ist.

Ist (w) ein Punkt von H, so wird (ϱw), $\varrho \neq 0$, ebenfalls ein Punkt von H sein. Wir können nun zu einem Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ für die nicht-homogene Gruppe übergehen, indem wir $w_n = 1$, $w_k = z_k$, ${\scriptstyle k=1,\ldots,n-1}$, setzen. Die inneren Punkte von $\mathfrak{F}$ sind dann die inneren Punkte des Bereiches

$$P: \qquad |z_1| \leqq |z_2| \leqq \cdots \leqq |z_{n-1}| \leqq 1,$$

und die Randpunkte von P sind wieder solche, wofür mindestens ein Gleichheitszeichen gilt. Ist nun etwa

$$|z_1| = |z_2|, \qquad z_1 \neq z_2,$$

so wollen wir unter den hiermit kongruenten Punkten denjenigen zu $\mathfrak{F}$ rechnen, wofür

$$0 \leqq \operatorname{arc} z_1 < \operatorname{arc} z_2 < 2\pi \quad \text{ist.}$$

Damit ist $\mathfrak{F}$ völlig definiert. Ein innerer Punkt von $\mathfrak{F}$ wird nur durch die Identität in einen Punkt von $\mathfrak{F}$ übergeführt. Ein Randpunkt von $\mathfrak{F}$ wird niemals in einen anderen Punkt von $\mathfrak{F}$ übergeführt.

Die Bereiche $\mathfrak{K}$. Wir sind nunmehr in der Lage, die Bereiche $\mathfrak{K}$ zu definieren. Ist (w_0, z_0) bereits ein Punkt von $\mathfrak{F}$ und ist K der dazugehörige Bereich, so möge $\mathfrak{K}$ eben als der Bereich K erklärt werden.

In jedem anderen Falle sei (w', z') derjenige Punkt von $\mathfrak{F}$, welcher (w_0, z_0) unter der Gruppe entspricht, und sei T eine Transformation, welche (w_0, z_0) in (w', z') überführt. Ist (w', z') ein innerer Punkt von H, so wird es nur eine derartige Transformation geben. Sonst kann es mehrere geben, und wir nehmen eine davon willkürlich an.

Im übrigen ist es leicht, ähnlich wie vorhin bei der Festlegung der Randpunkte von $\mathfrak{F}$, eine Verabredung zu treffen, wonach die Transformation T auch in diesem Falle eindeutig bestimmt wird. So könnte man beispielsweise unter zwei Transformationen

$$\varrho x_1' = x_{i_1}, \ldots, \varrho x_n' = x_{i_n},$$

$$\varrho x_1' = x_{j_1}, \ldots, \varrho x_n' = x_{j_n},$$

die erstere stets dann und nur dann vorziehen, falls die erste von 0 verschiedene Differenz $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \ldots$ positiv ist.

Fahren wir fort, indem wir den zu (w', z') und zur transformierten Funktion $f'(w', z')$ gehörigen Bereich K bestimmen. Durch die zu T inverse Transformation wird nun K in denjenigen Bereich übergeführt, welchen wir als $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen.

§ 23. Analytische Fortsetzung längs einer Kurve.

Kurven im erweiterten Raume. Unter einer *regulären Kurve* des erweiterten Raumes versteht man eine Punktmenge L, welche in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegt werden kann, derart, daß je zwei aufeinanderfolgende Teile entweder schon im Endlichen liegen und eine reguläre Kurve bilden oder doch wenigstens durch eine Transformation der betreffenden Gruppe ins Endliche projiziert werden können, wobei dann das Abbild derselben eine reguläre Kurve abgibt. Im übrigen soll die Kurve L aus einem zusammenhängenden Stücke bestehen.

Kann man die obigen Teile außerdem noch so wählen, daß jeder davon, welcher bereits im Endlichen liegt, analytisch ist, während die anderen, nachdem sie einmal ins Endliche projiziert sind, analytische Kurvenbogen liefern, so heißt L eine *analytische Kurve* bzw., falls mehrere verschiedene analytische Kurvenbogen

aneinander gereiht sind, ein *analytischer Kurvenzug* des erweiterten Raumes.

Analytische Fortsetzung längs einer Kurve. Sei L eine reguläre vom Punkte (w_0, z_0) ausgehende Kurve des eigentlichen bzw. des erweiterten Raumes, und sei $f(w, z)$ im Punkte (w_0, z_0) analytisch. Dann kann man $f(w, z)$ vermöge übereinandergreifender Bereiche $\mathfrak{K}$ längs L analytisch fortsetzen, indem man zunächst einen innerhalb $\mathfrak{K}_{w_0, z_0}$, aber nahe am Rande dieses Bereiches gelegenen Punkt (w_1, z_1) wählt und dann den Bereich $\mathfrak{K}_{w_1, z_1}$ in Betracht zieht. Durch Wiederholung dieses Schrittes wird man entweder die ganze Kurve L mit einer endlichen Anzahl von Bereichen $\mathfrak{K}_{w_i, z_i}$ überdecken, oder aber auf die Existenz eines ersten unerreichbaren Punktes, $(\bar{w}, \bar{z})$, schließen können.

Die übrigen Entwicklungen des ersten Bandes, Kap. 9, § 1 übertragen sich jetzt ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Variabelen. Wir heben noch die Definition besonders hervor, wonach eine in einem Bereiche T analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ und eine zweite im Bereiche T' analytische Funktion $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ als gegenseitige analytische Fortsetzungen voneinander erklärt werden sollen, falls es möglich ist, die Funktion f von einem inneren Punkte des Bereiches T aus längs einer Kurve L bis zu einem inneren Punkte P von T' hin analytisch fortzusetzen, wobei dann diese letzte Fortsetzung in der Nähe von P mit der Funktion φ übereinstimmen soll.

Theorem. *Sei T ein Bereich von einfachem linearen Zusammenhange, und sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine in einem Punkte von T analytische Funktion. Läßt sich dann f längs jeder in T belegenen regulären Kurve analytisch fortsetzen, so bilden die also erhaltenen Funktionswerte eine in T analytische Funktion.*

Der Beweis läßt sich hier geradeso führen wie im Falle $n = 1$ (I, 9, § 2), indem man sich der Verallgemeinerung jener Entwicklungssätze betreffend linear einfach zusammenhängende Bereiche bedient. Andererseits kann man von der Voraussetzung ausgehen, daß jede einfache geschlossene in T gelegene Kurve L sich stetig auf einen inneren Punkt von T zusammenziehen läßt, ohne einen Randpunkt von T zu überschreiten. Wäre nun der Satz nicht richtig, so müßte es einen inneren Punkt A von T und eine Bestimmung $f = f_1$ der Funktion in der Nähe von A geben, derart, daß, wenn f_1 von A aus längs einer gewissen Kurve L analytisch

fortgesetzt wird, eine von f_1 verschiedene Bestimmung f_2 von f in der Nähe von A sich einstellt. Jetzt ziehe man L stetig auf einen inneren Punkt B von T zusammen. Dabei beschreibt der Punkt A eine Kurve, längs deren sowohl f_1 als f_2 analytisch fortgesetzt werden mögen. Da nun aber f_1 und f_2 stets voneinander verschieden sein müssen, in der Nähe von B es aber nicht sein können, so wird man hiermit zu einem Widerspruch geführt.

Der Zusatz (I, 9, § 2) nimmt hier auf Grund des Satzes von § 20 eine verschärfte Form an, welche den jenem Satze zugefügten Zitaten gemäß noch enger gefaßt werden kann.

Zusatz. *Verhält sich eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte des unendlich fernen Bereiches analytisch, so ist f eine Konstante.*

Das Theorem (A'), (I, 9 § 2), läßt zwar auch eine Verallgemeinerung zu, welche jedoch von weniger Bedeutung ist, wie im Falle $n = 1$. Unter den Voraussetzungen des Satzes kann man nämlich schließen, daß sich keine zweiseitige Fläche S in die Kurve L einspannen läßt, derart, daß L stetig über S hin verschoben und schließlich auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, während f dabei stets längs L analytisch fortgesetzt werden kann. Mit anderen Worten läßt sich die Kurve L nicht in einen linear einfach zusammenhängenden Bereich einbetten, worin die Funktion beliebig analytisch fortgesetzt werden kann.

Der Satz von Bd. I, S. 454 überträgt sich direkt auf Grund des verallgemeinerten Riemannschen Satzes von Kap. 3, § 3.

Von den vier Aufgaben gilt die zweite unverändert. Auch die dritte trifft zu, und zwar auf Grund der Sätze von Kap. 3, § 29. Die vierte handelt von meromorpher Fortsetzung, Kap. 3, § 13, und bleibt ebenfalls bestehen.

§ 24. Definition einer monogenen analytischen Funktion.

Im ersten Bande, Kap. 9, §§ 3, 4, ist der Begriff einer monogenen analytischen Funktion einer komplexen Variabelen ausführlich entwickelt worden. Jene Definition überträgt sich unmittelbar an der Hand des Vorausgehenden auf Funktionen mehrerer Argumente. Insbesondere braucht man auf S. 455—457 nur den Wortlaut und die Beziehung in evidenter Weise abzuändern.

Was dagegen den Begriff des monogenen analytischen Ge-

bildes (I, 9, S. 457) anbetrifft, so müssen wir deswegen auf das folgende Kapitel hinweisen.

Die Definition eines Zweiges bleibt bestehen. An Stelle der Riemannschen Fläche tritt jetzt der mehrfach zu zählende Riemannsche Raum. Auf das Analogon der Verzweigungspunkte können wir aber erst eingehen, wenn uns die Entwicklungen des nächsten Kapitels zur Verfügung stehen.

Da der Definitionsraum der Funktionen mehrerer Argumente der Anschauung weiter entrückt ist, wie im Falle $n = 1$, so ist es um so mehr von Wichtigkeit, eine vollkommene arithmetische Präzisierung des Begriffs der monogenen analytischen Funktion zu besitzen. Glücklicherweise läßt sich die Arithmetisierung im Falle $n = 1$ ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen. Der Hauptsatz (I, 9 § 4) nimmt hier folgende Gestalt an.

Theorem. *Sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(a_1, \ldots, a_n) = (a)$ analytisch. Dann kann man dieser Funktion eine abzählbare Menge von Funktionen:*

$$w = f_k(z_1, \ldots, z_n), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

folgender Beschaffenheit zuordnen:

a) *Die Funktion $f_k(z_1, \ldots, z_n)$ verhält sich analytisch in einem Bereiche $\mathfrak{K}_k$, dessen Mittelpunkt im Punkte $(a^k) = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$ $k = 0, 1, 2, \ldots$, liegt. Daß $\mathfrak{K}_k$ möglichst groß angenommen werde, ist ja hier in der Definition dieses Bereiches mit enthalten. In der Nähe der Stelle $(a^0) = (a)$ soll außerdem $f_0(z_1, \ldots, z_n)$ mit der vorgelegten Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ übereinstimmen.*

b) *Jede Funktion $f_k(z_1, \ldots, z_n)$ läßt sich aus jeder anderen dieser Funktionen durch analytische Fortsetzung ableiten.*

c) *Sei L eine reguläre Kurve des erweiterten Raumes, längs deren $f(z_1, \ldots, z_n)$ sich analytisch fortsetzen läßt. Dann kann diese analytische Fortsetzung vermöge einer endlichen Anzahl der Funktionen $f_k(z_1, \ldots, z_n)$ geleistet werden.*

Der Beweis gestaltet sich auch geradeso wie im Falle $n = 1$. Wir gehen vom Bereiche $\mathfrak{K}_0$ aus und numerieren zunächst die rationalen Punkte desselben, d. h. diejenigen Punkte von $\mathfrak{K}_0$, deren Koordinaten sämtlich rationale komplexe Zahlen sind; dazu werde auch der Punkt (a) selbst mit gezählt:

$$(\bar{a}^0) = (a), \quad (\bar{a}^1), \quad (\bar{a}^2), \ldots$$

Jedem dieser Punkte $(\bar{a}^k)$ ordnen wir dann den zugehörigen Bereich $\bar{\mathfrak{K}}_k$ zu. Die so gewonnenen Funktionen $\bar{f}_k(z_1, \ldots, z_n)$ genügen Bedingungen a) und b) des Satzes.

Jetzt ist schon klar, wie das Räsonnement weiter verläuft, und so erhält man denn den vollständigen Beweis.

Anstatt von einer einzigen Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ auszugehen, hätten wir auch gleich eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen

$$f^{(1)}(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f^{(l)}(z_1, \ldots, z_n),$$

deren jede sich im Punkte (a) analytisch verhält, zugrunde legen können. Die Formulierung des erweiterten Satzes ist ja evident, und der Beweis gestaltet sich ebenfalls so wie im oben besprochenen Falle.

Der am Ende jenes früheren Paragraphen befindliche Satz nimmt hier die folgende Gestalt an.

Satz. *Vorgelegt sei ein Funktionensystem,*

$$w_i = f^{(i)}(z_1, \ldots, z_n),$$

wobei $f^{(i)}(z_1, \ldots, z_n)$ *sich im Punkte* (a) *analytisch verhält. Sei ferner* $(z) = (z')$ *ein beliebiger Punkt, nach welchem sich das simultane Funktionensystem analytisch fortsetzen läßt, und sei* $(w_1', \ldots, w_l')$ *das also erhaltene System der Funktionenwerte. Dann bilden die verschiedenen Wegen entsprechenden Komplexe* $(w_1', \ldots, w_l')$ *stets nur eine abzählbare Menge.*

Vom Definitionsbereiche einer monogenen analytischen Funktion. Im Anschluß an den Fall $n = 1$ liegt es nahe, den Inbegriff der zu einer monogenen analytischen Funktion bzw. zu einem monogenen analytischen Funktionensysteme gehörigen Bereiche $\mathfrak{K}$ als einen mehrblätterigen Riemannschen Raum auffassen zu wollen. In besonderen Fällen ist dies auch leicht durchzuführen. Wir erinnern aber daran, daß der Beweis schon im Falle $n = 1$ nicht auf der Hand lag; (I, 14 § 18). Und ebenso im Falle $n > 1$ bedarf diese Frage einer besonderen Untersuchung.

Zum Begriffe der monogenen analytischen Funktion ist indessen dieser Satz nicht nötig, wie aus dem Vorhergehenden ja bereits ersichtlich ist. Trotzdem ist es zweckmäßig, wenigstens im Kleinen eine Vorstellung des Raumes der Argumente der Funktion zu haben. Es sei uns darum gestattet, die verschiedenen $\mathfrak{K}_k$ nebst ihren zugehörigen Funktionselementen $f_k(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. Systemen

$(f_k^{(1)}(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_k^{(l)}(z_1, \ldots, z_n))$ ins Auge zu fassen und von dem Inbegriffe dieser $\mathfrak{K}_k$ als vom *Definitionsbereiche* der Funktion bzw. des Funktionensystems zu reden, ohne dabei die andere Frage vorläufig zu berühren, wie diese zu einem Riemannschen Raume zusammenzufügen sind.

Algebraische Funktionen. Außer solchen analytischen Funktionen, welche aus den Elementarfunktionen explizite zusammengesetzt werden, sind die algebraischen Funktionen mehrerer Argumente wohl die einfachsten, welche sich in der Praxis einstellen. Sei $G(z_1, \ldots, z_n)$ ein irreduktibles Polynom, welches von positivem Grade in z_n ist. Daß dann durch die Gleichung

$$G(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

eine monogene analytische Funktion von $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ definiert wird, kann man mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes über rationale Funktionen mehrerer Variabelen nachweisen; vgl. Kap. 3, § 29:

§ 25. Von der Permanenz einer Funktionalgleichung; analytische Fortsetzung vermöge einer solchen.

Wir können dem Theorem von Bd. I, Kap. 9, § 6 jetzt eine etwas allgemeinere Fassung geben, da wir damals von ganzen Funktionen mehrerer Veränderlichen nicht reden konnten.

Theorem. *Sei*

$$G(w_1, \ldots, w_n) \tag{1}$$

eine ganze rationale oder transzendente Funktion von $w_1, \ldots, w_n$, *und sei* $\mathfrak{T}$ *der Definitionsbereich eines gewissen monogenen analytischen Funktionensystems,* $f_1(z_1, \ldots, z_p), \ldots, f_n(z_1, \ldots, z_p)$. *Setzt man nun*

$$w_i = f_i(z_1, \ldots, z_p), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{2}$$

und trägt man diese Werte in $G(w_1, \ldots, w_n)$ *ein, so möge die hierdurch entstehende Funktion von* $(z_1, \ldots, z_p)$ *in der Umgebung eines Punktes* $(z) = (a)$ *von* $\mathfrak{T}$ *identisch verschwinden:*

$$G[f_1(z_1, \ldots, z_p), \ldots, f_n(z_1, \ldots, z_p)] \equiv 0. \tag{3}$$

Alsdann leistet auch jedes System gleichzeitiger analytischer Fortsetzungen der Funktionen (2) *über einen in* $\mathfrak{T}$ *verlaufenden Weg* L *hin der Funktionalgleichung* (3) *Genüge.*

Allgemeiner gilt der Satz für jede Funktion $G(w_1, \ldots, w_n; z_1, \ldots, z_p)$, *welche sich in einem beliebigen Punkte* (w', z') *analytisch verhält, wo* (w') *willkürlich im endlichen Raume genommen wird und* (z') *einen regulären Punkt von* $\mathfrak{T}$ *bedeutet.*

Der Beweis gestaltet sich geradeso wie im früheren Falle.

Daß solche Einschränkungen, wie sie bei der obigen Formulierung des Satzes auftreten, nicht überflüssig sind, zeigt ein Beispiel:

$$G(w_1, w_2) = Q(w_1) - Q(w_2),$$

wo $Q(z)$ die in Bd. I, Kap. 9, § 5 definierte Funktion bedeutet, und $\mathfrak{T}$ die schlichte Ebene ist. Setzt man hier

$$w_1 = f_1(z) = z, \qquad w_2 = f_2(z) = z,$$

so wird zwar (3) genügt, solange $|z| < 1$ ist, — aber auch nur so lange.

Das Theorem ist für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung.

Eine klassische Anwendung des Satzes findet sich bei Weierstraß[1]), wo es sich um den Nachweis handelt, daß die symmetrischen Verbindungen der Abelschen Funktionen im ganzen endlichen Raume der Argumente keine anderen Singularitäten als nur außerwesentliche aufweisen. Die Schlußweise ist mit der im Bd. I, Kap. 9, § 6 unter b) auseinander gesetzten Methode verwandt, wodurch gezeigt wurde, daß die Funktion sn u keine anderen Singularitäten im Endlichen als nur Pole besitzt.

In dieser Hinsicht erwähnen wir auch die Weierstraßsche Abhandlung betreffend die analytischen Fakultäten. Nachdem sich namhafte Mathematiker mit diesem Problem bereits beschäftigt hatten, war es der Begriff der analytischen Fortsetzung nebst der Permanenz einer Funktionalgleichung, welcher den Fortschritt gab; *Werke*, Bd. I, S. 155.

§ 26. Schlußbemerkungen über analytische Fortsetzung.

Weierstraß hielt es nicht für überflüssig, zu erwähnen, daß die Werte, welche eine analytische Funktion längs eines Stückes einer analytischen Kurve annimmt, unter Umständen längs der

1) Es ist mir nämlich in der Erinnerung, daß Weierstraß in seinen Vorlesungen über Abelsche Funktionen diese Methode verwendet habe. In seinen *Werken*, Bd. IV, 22. Kap. hat er den Beweis freilich anders geführt.

Kurve analytisch fortgesetzt werden können, ohne daß die Funktion der ursprünglichen Argumente notwendig eine entsprechende analytische Fortsetzung gestattet.

Sei beispielsweise $Q(z)$ die in Bd. I, Kap. 9, § 5 definierte Funktion. Daraus bilden wir die Funktion

$$f(z_1, z_2) = Q(z_1)Q(z_2).$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion besteht offenbar aus dem Innern des Kreiszylinders

$$\mathfrak{T}: \qquad |z_1| < 1, \qquad |z_2| < 1.$$

Im übrigen ist sie auch stetig am Rande desselben. Da nun $Q(0) = 0$ ist, so nimmt f längs der Geraden

$$L: \qquad z_1 = 0, \qquad z_2 = t, \qquad 0 \leqq t < 1,$$

den Wert 0 an, und diese Werte lassen sich auch längs L außerhalb $\mathfrak{T}$ fortsetzen. — Man vergleiche übrigens das Beispiel am Ende von § 25.

Endlich sei noch bemerkt, daß die Punkte des $(2n+2)$-dimensionalen Raumes, welche eine monogene analytische Funktion

$$w = f(z_1, \ldots, z_n)$$

darstellen, in jede Nachbarschaft eines jeden Punktes dieses Raumes hineindringen können. Als Beleg dafür diene folgendes Beispiel. Sei

$$w = f(z)$$

ein überall endliches Abelsches Integral, $p > 1$, und seien mindestens drei der Periodizitätsmoduln linear unabhängig im Bereiche der ganzen Zahlen. Dann kommt w in einem beliebigen Punkte $z = z'$ einem willkürlich vorgegebenen Werte C beliebig nahe.

Dasselbe Beispiel dient auch allgemein, indem man $f(z)$ bloß als eine Funktion von n Argumenten $z_1 = z, z_2, \ldots, z_n$ auffaßt.

Zweites Kapitel.

Implizite Funktionen. Teilbarkeit.

§ 1. Mehrdeutige implizite Funktionen.

Eine der frühesten Anwendungen des Cauchyschen Residuenkalkuls besteht darin, die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen oder auch transzendenten Gleichung zu bestimmen, welche in der Nähe einer bestimmten Wurzel derselben liegen.[1])

Sei $F(w, z)$ im Punkte (b, a) analytisch, und sei

$$F(b, a) = 0, \qquad F(w, a) \not\equiv 0.$$

Dann wird die Funktion $F(w, a)$ eine Wurzel m-ter Ordnung, $m \geqq 1$, im Punkte $w = b$, aber keine zweite Wurzel in der Nähe von b haben. Sei

$$|w - b| < r_1, \qquad |z - a| < h_1$$

ein Bereich, in welchem $F(w, z)$ sich analytisch verhält, so kann man $r < r_1$ so wählen, daß $F(w, a)$ in keinem Punkte des Bereiches $0 < |w - b| \leqq r$ verschwindet. Darauf möge $h \leqq h_1$ so bestimmt werden, daß $F(W, z) \neq 0$ ist, wo $|W - b| = r$ und $|z - a| < h$ ist. Daß dies in der Tat angeht, erhellt daraus, daß $F(w, z)$ in jedem Punkte der Kurve $|W - b| = r$, $z = a$ stetig und von 0 verschieden ist. Der Kürze wegen setzen wir hinfort $b = 0$.

Nun behaupte ich: ist z ein beliebiger Punkt des Bereiches

T: $$|z - a| < h,$$

so hat die Gleichung

(1) $$F(w, z) = 0$$

1) Cauchy, Turiner Abhandlung vom 11. Oktober 1831. — *Exercices d'analyse*, Bd. 2, 1841, S. 64; vgl. (I, 7, S. 354).

genau m im Kreise $|w| < r$ gelegene Wurzeln. In der Tat wird die Anzahl der in jenem Kreise belegenen Wurzeln von $F(w, z)$, indem man z als einen festen Punkt von T und w als im Kreise $|w| \leqq r$ veränderlich ansieht, durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_w(W, z)}{F(W, z)}\, dW, \qquad F_w(w, z) = \frac{\partial F}{\partial w},$$

gegeben, wobei über den Kreis C: $|W| = r$, in positivem Sinne integriert wird. Im Punkte $z = a$ hat dieses Integral den Wert m. Fernerhin ändert sich dasselbe stetig, wenn z sich im Innern des Bereiches T bewegt, und da nun das Integral stets eine ganze Zahl vorstellt, so muß letztere notwendig immer den gleichen Wert m beibehalten. — Wir wollen die m Wurzeln mit $w_1, \ldots, w_m$ bezeichnen.

Des weiteren sei $\varphi(w)$ eine im Kreise $|w| < r$ analytische und am Rande desselben stetige Funktion. Erstreckt man das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(W) \frac{F_w(W, z)}{F(W, z)}\, dW$$

in positivem Sinne über C, so erhält man hierdurch (I, 7, § 11, S. 348, 1. Satz) den Wert des Ausdrucks[1])

$$\varphi(w_1) + \cdots + \varphi(w_m) = P(z).$$

Insbesondere erkennt man, daß $P(z)$ im Bereiche T eindeutig und analytisch ist.

Ist $m = 1$ und setzt man $\varphi(w) = w$, so ergibt sich hiermit, daß durch die Gleichung (1) eine Funktion $w = P(z)$ definiert wird, welche sich im Bereiche T analytisch verhält; man vergleiche auch (I, 7, § 11, Aufg. 1). Im übrigen werden sämtliche in der Nähe der Stelle $(0, a)$ belegenen Wurzeln der Gleichung (1) durch die Punktepaare $(P(z), z)$ erschöpft. Hier findet sich wohl der erste Existenzbeweis betreffend implizite Funktionen.[2])

Soviel bei Cauchy. Jetzt ist nur noch ein kurzer Schritt zu einer wichtigen Darstellung der Funktion w im Falle $m > 1$. Dies geschieht, indem wir mit Simart[3])

$$\varphi(w) = w^k, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

---

1) Cauchy, a. a. O., S. 66.
2) Cauchy, a. a. O., S. 71.
3) Picard, *Traité d'analyse*, Bd. 2, Kap. 9.

setzen. So kommt:

$$w_1^k + w_2^k + \cdots + w_m^k = P_k(z).$$

Zieht man noch die bekannten Formeln der Algebra heran, wodurch die symmetrischen Funktionen

$$A_1 = -(w_1 + w_2 + \cdots w_m),$$

$$A_2 = w_1 w_2 + w_1 w_3 + \cdots + w_{m-1} w_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m = \pm w_1 w_2 \ldots w_m,$$

rational und ganz durch obige Summen dargestellt werden, so erkennt man, daß auch die A_k im Bereiche T analytische Funktionen von z sind.

Hiermit ist folgender Satz begründet, den wir gleich für den Fall von $n+1$ Variabelen aussprechen, da der vorstehende Beweis ohne wesentliche Modifikation auch hier noch gilt.

Satz. *Sei $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ analytisch, und sei*

$$F(b, a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad F(w, a_1, \ldots, a_n) \not\equiv 0.$$

Der Einfachheit halber werde $b = 0$ gesetzt. Dann gibt es eine bestimmte Umgebung T der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ und eine Umgebung K des Punktes $w = 0$,

$$T: \ |z_j - a_j| < h, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad K: \ |w| < r,$$

derart, daß, wenn (z) ein beliebiger Punkt von T ist, die Gleichung

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = 0$$

genau m Wurzeln $w_1, w_2, \ldots, w_m$ in K besitzt.

Im übrigen werden diese Wurzeln durch eine Gleichung von der Form

$$w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0$$

gegeben, wobei A_k, $k=1,\ldots,m$, eine im Bereiche T analytische, im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ verschwindende Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ bedeutet.

In dieser Formulierung ist der Satz wohl zuerst von Weierstraß[1]) ausgesprochen und vermöge des Vorbereitungssatzes (vgl. unten § 2) bewiesen worden. Er findet sich bei Poincaré[2]) nebst einem Beweise und wurde später auch von Weierstraß[3]) gedruckt.

§ 2. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz.

Der Vorbereitungssatz.[4]) *Sei die Funktion* $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ *im Punkte* $(b, a_1, \ldots, a_n)$ *analytisch und sei*

$$F(b, a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad F(w, a_1, \ldots, a_n) \not\equiv 0.$$

Der Einfachheit halber werde $b = 0$ *gesetzt. Dann läßt sich* F *in einer bestimmten Umgebung des Punktes* $(0, a_1, \ldots, a_n)$*:*

$$\mathfrak{T}: \qquad |w| < r, \qquad |z_j - a_j| < h, \qquad {\scriptstyle j=1,\ldots,n,}$$

in der Form darstellen:

$$(1)\quad F(w, z_1, \ldots, z_n) = (w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m)\,\Omega(w, z_1, \ldots, z_n),$$

wo $A_k,\ {\scriptstyle k=1,\ldots,m,}$ *eine im Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$ *analytische, dort verschwindende Funktion von* $(z_1, \ldots, z_n)$ *bedeutet und* Ω *sich im Bereiche* $\mathfrak{T}$ *analytisch verhält und dort nicht verschwindet.*

Behufs des Beweises[5]) knüpfen wir an die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen an und bestimmen vorerst die Größen

---

1) Vorlesungen an der Berliner Universität, von 1860 an; vgl. *Werke*, 2, S. 135, Anm. Doch kommt der Fall $n = m = 1$, wie vorhin schon erwähnt, bereits bei Cauchy vor.

2) Pariser *Thèse*, 1879, p. 6, Lemme II.

3) *Funktionenlehre*, 1886, S. 107 = *Werke*, 2, S. 135. Dieser Publikation war schon eine lithographierte Ausgabe aus dem Jahre 1879 vorausgegangen.

4) Vgl. das voraufgehende Zitat auf Weierstraß. In den letzten Jahren sind mehrere Beweise des Vorbereitungssatzes erschienen, welche meistenteils algebraischen Charakters sind und wodurch auch die Mittel gegeben werden, um die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung zu bestimmen; Brill, *Sitzungsber. der Münchener Akad.* 21 (1891) S. 207, sowie *Math. Annalen* 69 (1910) S. 538, wobei auch die Arbeiten von Stickelberger, Goursat und Hartogs zitiert sind. Ferner Dumas, *Sitzungsber. der Münchner Akad.* 4. Dez. 1909; Bliss, *Bull. Amer. Math. Soc.* 16 (1910) S. 356 und *Princeton Colloquium*, 1913, S. 49; Macmillan, *Bull. Amer. Math. Soc.* 17 (1910) S. 116. Wegen Verallgemeinerungen des Vorbereitungssatzes vgl. Poincaré, *Thèse* 1879, sowie *Mécanique céleste*, Bd. 1, S. 72; Risley und Macdonald, weiter unten im Texte; Bliss, *Transactions Amer. Math. Soc.* 13 (1912) S. 133; Macmillan, *Math. Annalen* 72 (1912) S. 157.

5) Dieser Beweis schließt sich den von Cauchy herrührenden Entwicklungen (§ 1) eng an; vgl. Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 2, Nr. 356.

r, h genau so wie früher. Sei z ein beliebiger Punkt des Bereiches T, § 1, den wir nun festhalten wollen. Wir beschränken uns wiederum der Einfachheit halber auf den Fall $n = 1$. Indem wir die Funktion bilden:

$$\frac{F(w, z)}{(w - w_1) \dots (w - w_m)} = \frac{F(w, z)}{f(w, z)} = \Phi(w),$$

wo

$$f(w, z) = w^m + A_1 w^{m-1} + \dots + A_m$$

gesetzt ist, erkennt man, daß $\Phi(w)$ im Bereiche K: $|w| < r$, abgesehen von hebbaren Singularitäten in den Punkten $w = w_1, \dots, w_m$, analytisch ist. In den genannten Ausnahmepunkten werde $\Phi(w)$ noch durch dessen Grenzwert dort erklärt. Dann verhält sich $\Phi(w)$ im Inneren des Kreises K analytisch, ist fernerhin stetig am Rande desselben und verschwindet endlich weder im Innern noch am Rande von K. Demgemäß läßt sich $\Phi(w)$ im Innern von K durch die Cauchysche Integralformel darstellen:

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{F(W, z)}{f(W, z)} \cdot \frac{dW}{W - w}.$$

Fassen wir nun dieses Integral ins Auge! Dasselbe stellt eine im Bereiche $|w| < r$, $|z - a| < h$ analytische Funktion der beiden unabhängigen Variabelen w, z: $\Omega(w, z)$, vor. Außerdem erkennt man, da $\Phi(w) \neq 0$ ist, daß $\Omega(w, z)$ im genannten Bereiche nicht verschwindet. Demgemäß liefert die Gleichung

$$F(w, z) = f(w, z)\,\Omega(w, z)$$

den in Aussicht genommenen Beweis.

Der erweiterte Satz. Der vorstehende Satz versagt, wenn $F(w, a)$ identisch verschwindet. Ist beispielsweise

$$F(w, z) = wz, \qquad a = 0,$$

so ist keine Spaltung der bewußten Art möglich. Es liegt indessen nahe, eine lineare Transformation, etwa

$$w = w' + z', \qquad z = w' - z'$$

vorzunehmen, wodurch hier F in eine neue Funktion $F_1(w', z')$ übergeht. Dann ist

$$F_1(w', z') = w'^2 - z'^2,$$

und auf diese Funktion ist der Weierstraßsche Satz nun anwend-

bar. Die Spaltung wird hier bereits geliefert, indem man $\Omega(w', z') = 1$ setzt.

Im allgemeinen Falle kann man ähnlich verfahren und gelangt so zum folgenden Satze.[1])

Satz. *Sei* $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *im Punkte* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *analytisch und sei*

$$G(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad G(x_0, x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0.$$

Der Einfachheit halber werde $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ *gesetzt. Dann läßt sich* G *vermöge einer linearen Transformation*

$$x_k = \gamma_{k,0} w + \gamma_{k,1} z_1 + \cdots + \gamma_{kn} z_n, \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n, \qquad \Sigma \pm \gamma_{00}\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{nn} \neq 0,$$

in eine Funktion $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ *verwandeln, welche den Bedingungen des Vorbereitungssatzes genügt.*

Zum Beweise ziehen wir den Taylorschen Lehrsatz mit Restgliede heran, indem wir der Kürze wegen $n = 1$ setzen:

$$G(x_0, x_1) = C_0 x_0^m + C_1 x_0^{m-1} x_1 + \cdots + C_m x_1^m + \mathsf{P}(x_0, x_1),$$

$$\mathsf{P}(x_0, x_1) = P_0(x_0, x_1) x_0^{m+1} + \cdots + P_{m+1}(x_0, x_1) x_1^{m+1}.$$

Dabei soll mindestens einer der Koeffizienten C_k von Null verschieden sein; vgl. Kap. 1, § 12.

Berechnen wir nun den Koeffizienten von w^m in der transformierten Funktion, so kommt

$$C_0 \gamma_{00}^m + C_1 \gamma_{00}^{m-1} \gamma_{10} + \cdots + C_m \gamma_{10}^m.$$

Demnach braucht man γ_{00} und γ_{10} nur so zu wählen, daß dieses Polynom nicht verschwindet. Zu den hierzu gewählten Werten lassen sich dann weitere Zahlen $\gamma_{01}, \gamma_{11}, \ldots$ als Koeffizienten von (2) auf mannigfache Art so annehmen, daß die Determinante der Transformation nicht verschwindet, und hiermit ist der Beweis geliefert.

Wir bemerken noch, wenn $\gamma_{ik}^{(0)}$ eine mögliche Wahl der Koeffizienten von (2) vorstellt, daß dann jeder Punkt $(\gamma_{00}, \gamma_{10}, \ldots, \gamma_{nn})$ einer bestimmten Nachbarschaft von $(\gamma_{00}^{(0)}, \gamma_{10}^{(0)}, \ldots, \gamma_{nn}^{(0)})$ ebenfalls ein brauchbares Koeffizientensystem abgibt.

1) Weierstraß, a. a. O.

Der besondere Fall $n = 1$. Im Falle $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ nur von zwei Argumenten abhängt — schreiben wir dann $F(w, z)$ — kann man dem Satze noch eine Formulierung erteilen, welche jener Voraussetzung bezüglich des identischen Verschwindens von $F(w, a)$, sowie der bewußten linearen Transformation entbehrt.[1]) Sollte nämlich

$$F(w, 0) \equiv 0$$

sein — wir wollen $a = 0$ annehmen — so erkennt man, indem man $F(w, z)$, als Funktion von z allein betrachtet, nach dem Mittelwertsatze von I, 7 § 7 darstellt, daß das von z unabhängige Glied fehlt, so daß also

$$F(w, z) = \frac{1}{m!} F_m(w, 0)\, z^m + z^{m+1} P_m(w, z), \qquad F_m = \frac{\partial^m F}{\partial z^m}$$

ist, wobei $m \geqq 1$ ist. Würde nun $F_m(w, 0)$ für alle Werte von m identisch verschwinden, so müßte auch $F(w, z) \equiv 0$ sein, und diesen Fall wollen wir ausschließen. Wir dürfen mithin annehmen, daß $F_m(w, 0) \not\equiv 0$ ist. Dann läßt sich $F(w, z)$, wie folgt, darstellen:

$$F(w, z) = z^m \overline{F}(w, z),$$

wobei nun die letzte Funktion nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatze weiter zerlegt werden kann. Das hiermit erhaltene Resultat läßt sich, wie folgt, aussprechen.

Der verallgemeinerte Vorbereitungssatz im Falle $n = 1$. *Sei $F(w, z)$ im Punkte* $(0, 0)$ *analytisch und sei*

$$F(0, 0) = 0, \qquad F(w, z) \not\equiv 0.$$

Dann läßt sich $F(w, z)$, wie folgt, darstellen:

$$F(w, z) = z^{\mu} f(w, z)\, \Omega(w, z).$$

Dabei ist μ eine natürliche Zahl oder 0, *und $\Omega(w, z)$ verhält sich analytisch im Anfange und verschwindet dort nicht. Endlich ist $f(w, z)$ entweder* $= 1$ *oder es ist*

$$f(w, z) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m,$$

wo A_k, $k = 1, \ldots, m$, sich im Punkte $z = 0$ analytisch verhält und dort verschwindet.

---

1) Hierüber vergleiche man Risley und Macdonald, *Annals of Mathematics*, 2. Reihe, Bd. 12 (1910/11) S. 82. Der Satz war bereits Black bekannt, *Proceedings Amer. Acad. Arts and Sci.* 37 (1902) S. 325 unten.

Man könnte die beiden ersten Faktoren zusammenziehen, indem man schreibt:

$$z^{\mu} f(w, z) = A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m,$$

wobei nun die A's sich alle im Punkte $z = 0$ analytisch verhalten. Hiermit wird der Gedanke nahegelegt, ob die für den Fall $n = 1$ also gewonnene Verallgemeinerung nicht auch für den allgemeinen Fall statthabe. Darnach würde sich F stets in der Form darstellen lassen:

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = (A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m)\, \Omega(w, z_1, \ldots, z_n),$$

wobei A_k, $k=0,\ldots,m$, sich im Punkte $(z) = (0)$ analytisch verhält und Ω sich im Punkte $(w, z_1, \ldots, z_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ analytisch verhält und dort nicht verschwindet.

Daß eine solche Darstellung im allgemeinen nicht möglich ist, beweist folgendes Beispiel.[1] Wir knüpfen an die Funktion $Q(z)$ (I, 9, § 5) an:

$$Q(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n!+2}}{(n!+1)(n!+2)},$$

und bezeichnen die dazu inverse Funktion mit $R(z)$:

$$w = Q(z), \qquad z = R(w).$$

Das durch die Gleichungen

(1) $$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = Q(v)$$

definierte Gebilde läßt sich implizite in der Form schreiben:

(2) $$F(x, y, z) = xR(z) - y = 0.$$

Nun ist aber klar[2], daß diese Funktion F bei Bevorzugung der Variabelen z sich nicht in der bewußten Weise darstellen läßt. Denn sonst müßte die Funktion

(3) $$z = Q\left(\frac{y}{x}\right)$$

mit der durch eine primitive irreduktibele Gleichung

(4) $$A_0(x, y) z^m + A_1(x, y) z^{m-1} + \cdots + A_m(x, y) = 0, \quad A_0(x, y) \not\equiv 0,$$

---

1) Osgood, *Transactions Amer. Math. Soc.* 17 (1916) S. 4.

2) Der nachstehende Beweis setzt die späteren Entwicklungen dieses Kapitels voraus, §§ 7, 9.

definierten Funktion z zusammenfallen. Dabei muß zunächst $A_0(0,0)=0$ sein. Ist nämlich $m>1$, so fällt die durch (4) definierte Funktion z mehrdeutig aus. Ist dagegen $m=1$, so verhält sich diese Funktion analytisch im Anfang. Beides verstößt aber gegen die Eigenschaften der durch die Gleichung (3) definierten Funktion.

Sei $G(x, y)$ ein im Anfange irreduktibler Faktor von $A_0(x, y)$. Dann sind die übrigen Koeffizienten $A_k(x, y)$ sicher nicht alle durch $G(x, y)$ teilbar, da das Pseudopolynom (4) sonst nicht primitiv wäre. Demgemäß gibt es einen Punkt (x_1, y_1) der Umgebung des Anfangs, in welchem

$$A_0(x_1, y_1)=0, \qquad A_k(x_1, y_1) \neq 0.$$

Sei andererseits (x_0, y_0) ein Punkt des Definitionsbereiches $|y|<|x|$ der Funktion (3), welcher ebenfalls in der Nähe des Anfangs liegt. Dann läßt sich (x_0, y_0) mit (x_1, y_1) vermöge einer Kurve verbinden, welche in der Nähe des Anfangs verläuft, keine Nullstelle von $A_0(x, y)$ und ebenfalls keine Nullstelle der Diskriminante von (4) durchsetzt, und längs deren endlich die in der Nähe von (x_0, y_0) durch (3) gegebene Wurzel von (4) eine analytische Fortsetzung gestattet, wodurch diese Wurzel in eine im Punkte (x_1, y_1) unendlich werdende Wurzel übergeführt wird. Hiermit sind wir nun zu einem Widerspruch geführt, da alle analytischen Fortsetzungen der Funktion $Q(y/x)$ ja endlich bleiben.

Wegen der geometrischen Besprechung dieses Beispiels vgl. § 29, Ende, S. 178.

§ 3. Fortsetzung. Der Fall einer reellen Funktion.

Ein Punkt $(z_1, \ldots, z_n)$ möge ein *reeller Punkt* heißen, wenn seine Koordinaten sämtlich reelle Zahlen sind. Auf Grund dieser Erklärung können wir folgenden Satz aussprechen.

Satz. *Sei $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche in der Umgebung des reellen Punktes $(b, a_1, \ldots, a_n)$ den Voraussetzungen des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes, § 2, genügt*[1]) *und außerdem in*

1) Dabei ist es ja gleichgültig, ob man verlangt, daß die Funktion F sich in der komplexen Umgebung des Punktes $(b, a_1, \ldots a_n)$ analytisch verhält oder für reelle Werte der Argumente in der Nähe dieses Punktes nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickeln läßt. Man braucht also von komplexen Werten der Argumente nicht zu reden.

den reellen Punkten von $\mathfrak{T}$ reelle Werte annimmt. Dann werden die Koeffizienten A_k, sowie die Funktion Ω, ebenfalls reelle Werte in den reellen Punkten von $\mathfrak{T}$ haben.

Entwickelt man nämlich F im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze, so werden die Koeffizienten der Reihe, der Formel (A′) von Kap. 1, § 15 zufolge, sämtlich reell ausfallen. Jetzt nehme man eine Entwicklung von F nach aufsteigenden ganzzahligen Potenzen von w allein vor. In einem reellen Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$ des Bereiches

$$|z_j - a_j| < h, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

werden dann die Koeffizienten dieser Reihe ebenfalls reell ausfallen. Nun zeigt man aber leicht, daß, wenn $w = \alpha + \beta i$ eine Wurzel einer solchen Reihe ist, dasselbe dann auch von der Zahl $w = \alpha - \beta i$ gilt.

Hiermit ist denn dargetan, daß die Wurzeln $w_1, \ldots, w_m$, § 2, entweder reell oder paarweise konjugiert imaginär sind, falls $(z_1, \ldots, z_n)$ ein reeller Punkt ist, und infolgedessen erweisen sich die Koeffizienten A_k als reell unter der gleichen Bedingung.

Daraus ergibt sich ferner, daß die Funktion

$$\frac{F(w, z_1, \ldots, z_n)}{w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m}$$

zunächst in jedem reellen Punkte von $\mathfrak{T}$, wofür sie definiert ist, einen reellen Wert hat. Mithin muß sie auch in ihren hebbaren Unstetigkeiten, sofern diese reelle Punkte sind, reell ausfallen, und damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

§ 4. Primfaktoren im Kleinen.

Der Zerlegung eines Polynoms in irreduktible Faktoren läuft eine zweite Theorie parallel, welche sich auf die Zerlegung einer in einem bestimmten Punkte verschwindenden analytischen Funktion in ein Produkt von Primfaktoren bezieht.

Über die Teilbarkeit. Seien $F(z_1, \ldots, z_n)$ und $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ zwei Funktionen, deren beide sich im Punkte $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ analytisch verhalten, und sei

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) \not\equiv 0.$$

Existiert dann eine dritte, ebenfalls im Punkte (a) analytische

Funktion $Q(z_1, \ldots, z_n)$ derart, daß in allen Punkten der Umgebung von (a)

$$(1) \qquad F(z_1, \ldots, z_n) = Q(z_1, \ldots, z_n)\,\Phi(z_1, \ldots, z_n)$$

ist, so heißt F *im Punkte* (a) *durch* Φ *teilbar,* und Q heißt dann der *Quotient* von F durch Φ.

Ist Φ im Punkte (a) von null verschieden, so decken sich diese Definitionen genau mit den entsprechenden arithmetischen Definitionen, welch letztere allgemein in der Analysis zugrunde gelegt werden. Verschwindet dagegen Φ in (a), so wird der arithmetische Quotient von F durch Φ nicht in allen Punkten der Umgebung von (a) existieren. Indessen wird in jedem Punkte P dieser Nachbarschaft, in welchem $\Phi \neq 0$ ist, durch den arithmetischen Quotienten eine in P analytische Funktion erklärt, und diese Funktion weist nur hebbare Unstetigkeiten in der Nähe von (a) auf. Demgemäß verhält sich der entsprechende Zweig der monogenen analytischen Funktion F/Φ ausnahmslos analytisch in der genannten Nachbarschaft und stimmt dort eben mit der vorstehend als dem Quotienten definierten Funktion $Q(z_1, \ldots, z_n)$ überein.

Ist eine nicht identisch verschwindende Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) durch eine Funktion $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ teilbar und verschwindet dabei sowohl Φ als auch der Quotient $Q(z_1, \ldots, z_n)$ in (a), so heißt F *im Punkte* (a) *reduktibel.*

Verhält sich dagegen F im Punkte (a) analytisch und verschwindet F dort, ohne identisch zu verschwinden; gestattet F ferner keine Zerlegung von der Form (1), wobei sowohl Φ als Q verschwinden, so heißt F *im Punkte* (a) *irreduktibel.* Eine irreduktible Funktion, als Faktor aufgefaßt, wird auch wohl als *Primfaktor* benannt.

Wie man sieht, beziehen sich die beiden letzten Definitionen nur auf solche im Punkte (a) analytische Funktionen $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche dort verschwinden, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Die Funktion 0 ist weder reduktibel noch irreduktibel, und dasselbe gilt auch von einer Funktion, welche im Punkte (a) überhaupt nicht verschwindet.

Eine im Punkte (a) irreduktible Funktion kann immerhin in gewissen Punkten jeder Umgebung von (a) reduktibel sein, wie das Beispiel zeigt:

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 y.$$

Diese Funktion ist, wie man leicht beweist, im Anfange irreduktibel. Dagegen zerfällt sie in jeder Nullstelle (a, b, c), wofür $b \neq 0$ ist:

$$F(x, y, z) = \left(z - x\sqrt{y}\right)\left(z + x\sqrt{y}\right).$$

Es gibt aber auch unendlich viele benachbarte Stellen, in denen sie irreduktibel ist, und zwar sind das alle Stellen $(a, 0, 0)$.

Zwei im Punkte (a) analytische Funktionen $F(z_1, \ldots, z_n)$ und $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ heißen *im Punkte* (a) *miteinander äquivalent,* wenn jede davon dort durch die andere teilbar ist. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Relation (1) besteht, wobei $Q(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) von null verschieden ist und außerdem F und Φ nicht identisch verschwinden. Sind F und Φ in (a) äquivalent, so sind sie es auch in jedem Punkte der Umgebung von (a).

Von prinzipieller Wichtigkeit ist folgender Satz.

Hauptsatz. *Ist* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *im Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$ *analytisch und verschwindet* F *dort, ohne identisch zu verschwinden, so läßt sich* F *auf eine und, sofern man zwischen äquivalenten Funktionen nicht unterscheidet, nur auf eine Weise in ein Produkt im genannten Punkte irreduktibler Faktoren zerlegen.*

Dem Beweise dieses Satzes gehen die algebraischen Erörterungen der folgenden Paragraphen voraus. Für $n = 1$ springt jedoch die Richtigkeit des Satzes sofort in die Augen.

Seien $F(z_1, \ldots, z_n)$ und $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ zwei Funktionen, welche sich beide im Punkte (a) analytisch verhalten und dort verschwinden, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Ist dann ein im Punkte (a) verschwindender Faktor von F mit einem Faktor von Φ äquivalent, so heißt dieser ein *im Punkte* (a) *gemeinsamer Teiler* von F und Φ. Auf Grund des Hauptsatzes setzt sich ein solcher aus einem Produkt gemeinsamer irreduktibler Faktoren von F und Φ multiplikativ zusammen. Kommt jeder letzterer mit der niederen der beiden Multiplizitäten gezählt vor, womit er bei F und Φ behaftet ist, so heißt er der *größte gemeinsame Teiler* von F und Φ *im Punkte* (a). Besitzen die Funktionen F und Φ keinen gemeinsamen Teiler im Punkte (a), so heißen sie *in* (a) *relativ prim zueinander.*

Dem vorhin betonten Umstande gegenüber, daß nämlich eine in einem Punkte (a) irreduktible Funktion doch in Punkten jeder

Umgebung von (a) reduktibel sein kann, ist folgender Satz von besonderer Bedeutung.

Satz.[1]) *Sind zwei Funktionen $F(z_1, \ldots, z_n)$ und $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ in einem Punkte (a) relativ prim zueinander, so sind sie es auch in jeder Stelle der Umgebung von (a), in welcher sie beide gleichzeitig verschwinden.*

Der Beweis ergibt sich aus den Entwicklungen von §§ 13, 14. Unter den Voraussetzungen des Satzes bilden nämlich die in der Nähe von (a) gelegenen gemeinsamen Nullstellen der beiden Funktionen F und Φ nur eine $(2n-4)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Gäbe es nun in diesem Bereiche einen Punkt (a'), in welchem F und Φ einen gemeinsamen Teiler hätten, so würden jene Nullstellen in der Nähe von (a') schon eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit liefern.

Wie man sieht, sind die Eigenschaften, worauf die vorstehenden Definitionen beruhen, invariant gegenüber einer ganzen, nicht-singulären linearen Transformation, oder allgemein gegenüber einer beliebigen Transformation

$$z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei sich f_i im Punkte $(z) = (a)$ analytisch verhält und die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$$

im Punkte (a) nicht verschwindet.

§ 5. Exkurs über Pseudopolynome.

Unter einem *Pseudopolynom* verstehen wir eine Funktion

$$\text{(A)} \qquad f(x, y) = f(x, y_1, \ldots, y_n) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

wobei $a_k = a_k(y_1, \ldots, y_n)$ sich im Punkte $(c) = (c_1, \ldots, c_n)$ analytisch verhält. Der Punkt (c) heißt die *Spitze* des Pseudopolynoms.

Verschwinden insbesondere alle a_k identisch, so verschwindet auch f identisch, und umgekehrt. Trifft dies nicht zu, so sei

$$a_0(y_1, \ldots, y_n) \not\equiv 0.$$

Dann heißt m der *Grad* von f.

1) Weierstraß, *Werke*, Bd. 2, S. 154.

Zwei Hilfssätze. Die nachfolgenden Untersuchungen verlaufen der Theorie der gewöhnlichen Polynome genau parallel; man vergleiche Bôcher, *Algebra*, Kap. 14—16. Dabei setzen wir den Hauptsatz von § 4 für $n = 1, 2, \ldots, n$ als richtig voraus. Wie bereits erwähnt, ist dies ersichtlich zulässig, wenn $n = 1$ ist.

1. Hilfssatz. *Ist das Pseudopolynom*

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m, \tag{1}$$

dessen Spitze im Punkte $(c) = (c_1, \ldots, c_n)$ *liege, als eine Funktion der* $n+1$ *Argumente* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *betrachtet, in einem Punkte* $(c, c_1, \ldots, c_n)$ *durch* $\psi(y) = \psi(y_1, \ldots, y_n)$ *teilbar, so ist auch jeder Koeffizient* $a_k(y) = a_k(y_1, \ldots, y_n)$ *im Punkte* $(c_1, \ldots, c_n)$ *durch* $\psi(y)$ *teilbar.*

Nach Voraussetzung ist

$$f(x, y) = \omega(x, y)\, \psi(y), \tag{2}$$

wo die im Punkte $(y) = (c)$ analytische Funktion $\psi(y)$ nicht identisch verschwindet und $\omega(x, y)$ eine im Punkte $(c, c_1, \ldots, c_n)$ analytische Funktion der $n+1$ Argumente $(x, y_1, \ldots, y_n)$ ist. Entwickelt man $\omega(x, y)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x - c$:

$$\omega(x, y) = \lambda_0 + \lambda_1(x - c) + \lambda_2(x - c)^2 + \cdots, \tag{3}$$

so sind die Koeffizienten im Punkte $(y) = (c)$ analytische Funktionen von $(y_1, \ldots, y_n)$.

Andererseits läßt das Pseudopolynom $f(x, y)$ eine ähnliche Entwicklung zu:

$$f(x, y) = \mu_0 + \mu_1(x - c) + \mu_2(x - c)^2 \ldots, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten μ_k linear und ganz von den a_k abhängen, und umgekehrt sind die a_k ganze lineare Funktionen der μ_k.

Indem man nun beide Seiten von (2) vermöge (4) und (3) durch Potenzreihen nach $x - c$ darstellt und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x - c$ miteinander vergleicht, ergibt sich, daß die μ_k sämtlich durch $\psi(y)$ teilbar sind, und mithin sind es auch die a_k.

Definition. Sei

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

ein Pseudopolynom, dessen Spitze im Punkte $(c) = (c_1, \ldots, c_m)$ liege. Dann möge $f(x, y)$ *primitiv* heißen, wenn die Koeffizienten $a_k = a_k(y)$ nicht sämtlich durch eine in der Spitze verschwindende Funktion $\psi(y) = \psi(y_1, \ldots, y_n)$ teilbar sind.

Damit $f(x, y)$ primitiv sei, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x, y)$, als Funktion der $n+1$ Argumente $(x, y_1, \ldots, y_n)$ betrachtet, in keinem Punkte $(b, c_1, \ldots, c_n)$ durch eine in der Spitze $(c_1, \ldots, c_n)$ verschwindende Funktion $\psi(y) = \psi(y_1, \ldots, y_n)$ teilbar sei.

Der Definition zufolge kann ein primitives Pseudopolynom nicht identisch verschwinden. Ist dasselbe insbesondere vom Grade 0, so darf es in der Spitze überhaupt nicht verschwinden.

Zusatz. *Ist $f(x, y)$ ein nicht identisch verschwindendes Pseudopolynom, so läßt sich f in ein Produkt zweier Pseudopolynome mit gleicher Spitze zerlegen:*

$$f(x, y) = \psi(y)\, g(x, y),$$

wobei das erste vom Grade null und das zweite primitiv ist.

Ist nämlich f nicht schon primitiv, so wird $\psi(y)$ der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von f sein.

2. Hilfssatz. *Ist das Produkt zweier Pseudopolynome*

$$f(x, y)\, \varphi(x, y)$$

mit gleicher Spitze (c) durch eine in (c) irreduktible Funktion $\psi(y)$ in einem Punkte $(c, c_1, \ldots, c_n)$ teilbar, so ist mindestens einer der beiden Faktoren im Punkte $(c, c_1, \ldots, c_n)$ durch $\psi(y)$ teilbar.

Der Beweis stimmt mit dem Beweise des entsprechenden Satzes für gewöhnliche Polynome genau überein; vgl. Bôcher, *Algebra*, Nr. 73, 2. Satz.

Über die Division. Seien $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ zwei Pseudopolynome mit gleicher Spitze, wovon das zweite von positivem Grade[1]) sei:

(5) $$\varphi(x, y) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots + b_p,$$

$$b_0(y_1, \ldots, y_n) \not\equiv 0, \qquad 0 < p.$$

1) Es genügt hier zu verlangen, daß $\varphi(x, y)$ nicht identisch verschwinde.

Dann besteht zwischen f und φ eine Relation von der folgenden Form:

$$P(y)\, f(x, y) = Q(x, y)\, \varphi(x, y) + R(x, y). \tag{6}$$

Hierbei bedeuten $P(y)$, $Q(x, y)$ und $R(x, y)$ Pseudopolynome mit nämlicher Spitze (c), wovon das erste vom nullten Grade ist, während das letzte entweder von niederem Grade als φ ist oder aber identisch verschwindet. Endlich sind P, Q, R durch kein in (c) verschwindendes Pseudopolynom nullten Grades gleichzeitig teilbar.[1])

Verschwindet b_0 in (c) nicht, so kann man $P(y) = 1$ setzen. Im anderen Falle wird dies im allgemeinen nicht möglich sein. Dann werden sich aber die irreduktiblen Faktoren von $P(y)$ unter den irreduktiblen Faktoren von $b_0(y)$ finden.

Sei

$$P_1(y)\, f(x, y) = Q_1(x, y)\, \varphi(x, y) + R_1(x, y) \tag{7}$$

eine zweite Relation von derselben Beschaffenheit. Indem man aus (6) und (7) die Identität

$$\begin{aligned} 0 = {} & [P_1(y)\, Q(x, y) - P(y)\, Q_1(x, y)]\, \varphi(x, y) \\ & + [P_1(y)\, R(x, y) - P(y)\, R_1(x, y)] \end{aligned}$$

ableitet, schließt man daraus zunächst, daß jede der eckigen Klammern identisch verschwindet. Hieraus ergibt sich dann, daß $P(y)$ und $P_1(y)$ miteinander äquivalent sind, sowie ferner, daß $R(x, y)$ und $R_1(x, y)$ entweder beide miteinander äquivalent sind oder aber identisch verschwinden; dasselbe gilt auch von $Q(x, y)$ und $Q_1(x, y)$.

Von der algebraischen bzw. analytischen Teilbarkeit. Wir stehen jetzt zwei verschiedenen Auffassungen der Division gegenüber. a) Es liegt nämlich nahe, f als durch φ teilbar zu erklären, falls

$$P(y) = 1, \qquad R(x, y) = 0$$

ist, so daß also

$$f(x, y) = Q(x, y)\, \varphi(x, y) \tag{8}$$

wird. Dabei ist $Q(x, y)$ ein Pseudopolynom mit gleicher Spitze (c). Unter diesen Bedingungen werden wir sagen, das Pseudopolynom $f(x, y)$ ist durch das Pseudopolynom $\varphi(x, y)$ *algebraisch teilbar.*

---

1) Bôcher, *Algebra,* Nr. 63, 2. Satz, sowie Nr. 73, Aufgabe.

b) Andererseits fordert die frühere Definition der Teilbarkeit in einem Punkte nur, daß

$$f(x, y) = \mathfrak{Q}(x, y)\, \varphi(x, y) \tag{9}$$

sei, wobei $\mathfrak{Q}(x, y)$ sich im Punkte $(c, c_1, \ldots, c_n)$ analytisch verhält. Im Gegensatz zu der soeben unter a) eingeführten Definition wollen wir letzteres Verhalten dadurch ausdrücken, daß wir sagen, $f(x, y)$ ist durch $\varphi(x, y)$ *im Punkte* $(c, c_1, \ldots, c_n)$ *analytisch teilbar.*

Ist $f(x, y)$ durch $\varphi(x, y)$ algebraisch teilbar, so ist f stets durch φ im Punkte $(c, c_1, \ldots, c_n)$ analytisch teilbar, wie auch immer c angenommen werden möge. Das Umgekehrte trifft aber nicht immer zu, wie das Beispiel zeigt:

$$f(x, y) = x - y, \qquad \varphi(x, y) = (yx - 1)(x - y).$$

Hier ist zwar f durch φ in jedem Punkte $(x, y) = (c, 0)$ analytisch teilbar, nicht aber algebraisch teilbar. Es gilt der folgende Satz.

1. Satz. *Damit das Pseudopolynom $f(x, y)$ durch das mit gleicher Spitze behaftete Pseudopolynom $\varphi(x, y)$ algebraisch teilbar sei, genügt, daß die Funktion $f(x, y)$ in jedem Punkte eines bestimmten, im übrigen beliebig schmalen Zylinderbereiches*

$$\mathfrak{T}: \qquad |x| < \infty, \qquad |y_k - c_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

durch die Funktion $\varphi(x, y)$ analytisch teilbar sei.

In der Tat wird durch den Bruch

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

eine Funktion $\Omega(x, y)$ definiert, welche sich in $\mathfrak{T}$ zunächst bis auf die dort befindlichen Nullstellen von $\varphi(x, y)$ analytisch verhält. Solche Punkte liefern aber zufolge der Voraussetzungen des Satzes nur hebbare Singularitäten, und daher läßt sich $\Omega(x, y)$ nach allen endlichen Stellen von $\mathfrak{T}$ hin analytisch fortsetzen.

Entwickelt man $\Omega(x, y)$ nach aufsteigenden Potenzen von x:

$$\Omega(x, y) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots,$$

wobei also die Koeffizienten $e_k(y_1, \ldots, y_n)$ sich im Zylinderbereich

$$\mathfrak{S}: \qquad |y_i - c_i| < h, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhalten, so wird diese Reihe für jeden solchen Punkt (y) und für alle Werte von x, also im ganzen Bereiche $\mathfrak{T}$, konvergieren.

Daraus schließt man aber, daß die Reihe mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen muß. In der Tat sei (y') ein Punkt von $\mathfrak{S}$, in welchem $b_0(y') \neq 0$ ist. Dann kann man (y') mit einer ebenfalls in $\mathfrak{S}$ gelegenen Nachbarschaft σ umgeben, derart, daß für alle Punkte von σ

$$g < | b_0(y) |$$

bleibt, wo g eine positive Konstante bedeutet. Demgemäß liegen die entsprechenden Wurzeln von $\varphi(x, y)$ im Endlichen, so daß also für alle Punkte von σ und für alle Werte x, wofür nur

$$G < | x |, \qquad G = \text{pos. Konst.},$$

ist, die Funktion

$$\frac{f(x, y)}{x^{m-p}\varphi(x, y)} = \frac{e_0}{x^{m-p}} + \cdots + e_{m-p} + e_{m-p+1}x + \cdots, \qquad p \leqq m,$$

endlich bleibt. Dieser Sachverhalt ist aber nur dann möglich, wenn identisch

$$e_k(y_1, \ldots, y_n) = 0, \qquad m - p < k,$$

ist. — Ist $m < p$, so schließt man in ähnlicher Weise, daß $f(x, y)$ identisch verschwindet.

Hiermit hat sich nun ergeben, daß $\Omega(x, y)$ ein Pseudopolynom ist, dessen Spitze in (c) liegt, und der Beweis ist fertig.

Ausgezeichnete Pseudopolynome. Eine für die Folge wichtige Klasse von Pseudopolynomen sind solche, wie sie beim Vorbereitungssatze bereits aufgetreten sind. Ist nämlich

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

wobei $a_k(y_1, \ldots, y_n)$ sich im Punkte $(y) = (c_1, \ldots, c_n)$ analytisch verhält und außerdem

$$0 < m, \qquad a_0(c) \neq 0, \qquad a_k(c) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

ist, so möge $f(x, y)$ ein *ausgezeichnetes Pseudopolynom* heißen.

Ein ausgezeichnetes Pseudopolynom ist stets primitiv. Ein solches Pseudopolynom hat offenbar auch die Eigenschaft, daß es zu einem beliebig kleinen positiven ε eine positives δ gibt, derart,

daß sämtliche Wurzeln von f an die Ungleichung

$$|x| < \varepsilon$$

geknüpft sind, sobald nur

$$|y_i - c_i| < \delta, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

genommen wird.

2. Satz. *Zerfällt ein ausgezeichnetes Pseudopolynom in das Produkt zweier Pseudopolynome, so ist jeder Faktor auch ein ausgezeichnetes Pseudopolynom.*

Der Beweis ergibt sich ohne Schwierigkeit.

3. Satz. *Ist das Pseudopolynom $f(x, y)$ durch ein ausgezeichnetes Pseudopolynom $\varphi(x, y)$ mit gleicher Spitze (c) im Punkte $(0, c_1, \ldots, c_n)$ analytisch teilbar, so ist f auch durch φ algebraisch teilbar.*

In der Tat werden hier alle Voraussetzungen des 1. Satzes in einem geeigneten Zylinderbereiche

$$|x| < \infty, \qquad |y_i - c_i| < \delta, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

erfüllt. Liegen nämlich die Wurzeln von $\varphi(x, y)$, wofür

$$|y_i - c_i| < \delta$$

in einem Bereiche $|x| < \varepsilon$, so kann man δ und ε noch so wählen, daß der Bereich

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y_i - c_i| < \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

in demjenigen Bereich liegt, wofür die genannte analytische Teilbarkeit gilt. Im Bereiche $|x| \geqq \varepsilon$, $|y_i - c_i| < \delta$, ist aber $f(x, y)$ sicher durch $\varphi(x, y)$ analytisch teilbar, da $\varphi(x, y)$ dort ja gar nicht verschwindet.

Zusatz. *Ist auch $f(x, y)$ ein ausgezeichnetes Pseudopolynom, so wird der Quotient entweder ein ausgezeichnetes Pseudopolynom oder ein primitives Pseudopolynom 0-ten Grades sein.*

4. Satz. *Sei*

$$F(x, y) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m$$

ein algebraisch irreduktibles[1]) *Pseudopolynom. Dann fallen alle Wurzeln in der Spitze zusammen.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Vorbereitungssatze nebst dem 3. Satze.

---

1) Vgl. § 7.

§ 6. Der Algorithmus des größten gemeinsamen Teilers.

Der Euklidische Algorithmus des größten gemeinsamen Teilers gilt hier ohne wesentliche Modifikation. Seien $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ zwei Pseudopolynome vom Grade m bzw. p, und sei $0 < p \leqq m$.[1]) Nach § 5 ergibt sich dann (vgl. Bôcher, a. a. O. Nr. 74):

$$
\begin{aligned}
P_{-1}(y) f(x, y) &= Q_0(x, y)\, \varphi(x, y) + R_1(x, y), \\
P_0(y)\, \varphi(x, y) &= Q_1(x, y)\, R_1(x, y) + R_2(x, y), \\
P_1(y)\, R_1(x, y) &= Q_2(x, y)\, R_2(x, y) + R_3(x, y), \\
&\;\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{\varrho-2}(y)\, R_{\varrho-2}(x, y) &= Q_{\varrho-1}(x, y)\, R_{\varrho-1}(x, y) + R_\varrho(x, y), \\
P_{\varrho-1}(y)\, R_{\varrho-1}(x, y) &= Q_\varrho(x, y)\, R_\varrho(x, y) + R_{\varrho+1}(y),
\end{aligned} \tag{1}
$$

wobei $P_k(y)$, $Q_k(x, y)$ und $R_k(x, y)$ Pseudopolynome bedeuten, wovon kein P und kein Q identisch verschwindet, und wobei außerdem P_{k-1}, Q_k, R_{k+1} durch kein in der Spitze (c) verschwindendes Pseudopolynom 0-ten Grades gleichzeitig teilbar sind.

Verschwindet $R_1(x, y)$ identisch, so schließt die Reihe schon mit der ersten Gleichung. Im anderen Falle ist der Grad von $R_1(x, y)$ niedriger als derjenige von $\varphi(x, y)$; usw.

Definition. Unter einem *algebraischen gemeinsamen Teiler* zweier Pseudopolynome $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ verstehen wir ein Pseudopolynom von positivem Grade und gleicher Spitze, welches beide teilt. Unter einem *algebraischen größten gemeinsamen Teiler* versteht man einen algebraischen gemeinsamen Teiler vom Maximalgrade. Da es sich bei den nachstehenden Untersuchungen nur um die algebraische Teilbarkeit handelt, werden wir der Einfachheit halber das Wort *algebraisch* in der Regel fortlassen.

1. Satz. *Damit $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ einen gemeinsamen Teiler haben, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$R_{\varrho+1}(y) \equiv 0.$$

1) Ist $0 < m < p$, so hat der Algorithmus sogar in gleicher Gestalt noch statt, wobei nur $P_{-1}(y) = 1$, $Q_0(x, y) = 0$, $R_1(x, y) = f(x, y)$ wird. Durch die zweite Gleichung (1) werden dann die Rollen von f und φ vertauscht. Es trägt jedoch zur Erleichterung des Verständnisses bei, wenn die Aufmerksamkeit nur auf den einen typischen Fall gelenkt wird.

Der Beweis für den entsprechenden Fall eigentlicher Polynome gilt hier unverändert; Bôcher, a. a. O., § 74, 1. Satz. Auch der daselbst befindliche 2. Satz nebst Beweis bleibt hier in Kraft. Er lautet für den gegenwärtigen Fall, wie folgt.

2. Satz. *Ist* $R_{\varrho+1}(y) \equiv 0$ *und setzt man*

$$R_\varrho(x, y) = S(y)\, G(x, y),$$

wo $S(y)$, $G(x, y)$ *Pseudopolynome vom* 0-*ten bzw. von positivem Grade sind, und* $G(x, y)$ *außerdem primitiv ist, so wird* $G(x, y)$ *der größte primitive gemeinsame Teiler von* $f(x, y)$ *und* $\varphi(x, y)$ *sein.*

Wir bemerken noch, daß die vorstehenden Sätze gewissermaßen auch im Großen gelten. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ ein willkürlicher Bereich des Raumes der Variabelen $(y_1, \ldots, y_n)$, und seien die Koeffizienten von $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ analytisch in $\mathfrak{T}$. Dann gilt die Relation (6) von § 5, sowie die Relationen (1) des gegenwärtigen Paragraphen, allgemein, wo x willkürlich und (y) irgendein Punkt von $\mathfrak{T}$ ist, und das entsprechende hat auch statt für die späteren Beziehungen, wie z. B. für (2).

Aufgabe. Man beweise folgenden Satz. Damit zwei Pseudopolynome, je von positivem Grade, keinen gemeinsamen Teiler besitzen, ist notwendig und hinreichend, daß eine Relation von folgender Form bestehe:

$$F(x, y)\, f(x, y) + \Phi(x, y)\, \varphi(x, y) = R(y), \tag{2}$$

wobei $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$, $R(y)$ Pseudopolynome mit gleicher Spitze sind und außerdem

$$R(y) \not\equiv 0.$$

Beispiel. $f(x, y) = x^2 - y_1$, $\varphi(x, y) = x^2 - y_2$, $F(x, y) = 1$, $\Phi(x, y) = -1$, $R(y) = y_2 - y_1$.

§ 7. Von der Reduktibilität.

Ein Pseudopolynom $f(x, y)$ von positivem Grade möge *algebraisch reduktibel* heißen, falls es sich in das Produkt zweier solchen Pseudopolynome mit der nämlichen Spitze zerlegen läßt. Es ist klar, daß $f(x, y)$ sich mindestens auf eine Weise in der Form darstellen läßt:

$$f(x, y) = f(y)\, [f_1(x, y)]^{\lambda_1} \cdots [f_l(x, y)]^{\lambda_l},$$

wo $f(y)$ ein Pseudopolynom nullten Grades und $f_k(x, y)$ ein irreduktibles primitives Pseudopolynom von positivem Grade mit der nämlichen Spitze bedeutet.

Sieht man zwei Faktoren als im wesentlichen identisch an, wenn sie miteinander äquivalent sind, so kann man folgenden Satz aussprechen.

1. Satz. *Ein Pseudopolynom von positivem Grade läßt sich auf eine und im wesentlichen nur auf eine Weise algebraisch zerlegen:*

$$f(x, y) = f(y)\,[f_1(x, y)]^{\lambda_1} \ldots [f_l(x, y)]^{\lambda_l},$$

wobei $f(y)$ ein Pseudopolynom vom Grade 0 und $f_k(x, y)$ ein irreduktibles primitives Pseudopolynom von positivem Grade mit der nämlichen Spitze bedeuten.

Der Beweis beruht auf folgendem Hilfssatze.

Hilfssatz. *Seien $f(x, y)$, $g(x, y)$, $\varphi(x, y)$ drei Pseudopolynome mit gleicher Spitze, wovon das dritte von positivem Grade, primitiv und irreduktibel ist, und sei $f(x, y)$ nicht durch $\varphi(x, y)$ algebraisch teilbar. Ist nun $f(x, y)\,g(x, y)$ durch $\varphi(x, y)$ algebraisch teilbar, so ist $g(x, y)$ durch $\varphi(x, y)$ algebraisch teilbar.*

Der Beweis wird geradeso geführt wie im Falle eigentlicher Polynome, und zwar sowohl mittels des Algorithmus des größten gemeinsamen Teilers als auch auf Grund der Identität (2), § 6.

Ausgezeichnete Pseudopolynome. Für solche Pseudopolynome bestehen folgende Sätze.

2. Satz. *Damit ein ausgezeichnetes Pseudopolynom $f(x, y)$ mit der Spitze $(c_1, \ldots, c_n)$ algebraisch irreduktibel sei, ist notwendig und hinreichend, daß dasselbe im Sinne von § 4 im Punkte $(0, c_1, \ldots, c_n)$ analytisch irreduktibel sei.*

Die Bedingung ist notwendig. Wäre nämlich

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\,\psi(x, y),$$

wobei φ und ψ beide im Punkte $(0, c_1, \ldots, c_n)$ analytisch sind und dort verschwinden, so wäre sicher

$$\varphi(x, c) \not\equiv 0,$$

da sonst auch $f(x, c)$ identisch verschwinden müßte. Wir dürfen nun $\varphi(x, y)$, mit Rücksicht auf den Weierstraßschen Vorbereitungssatz, als ein ausgezeichnetes Pseudopolynom annehmen. Nach

dem 3. Satze nebst Zusatze von § 5 erweist sich dann $\psi(x, y)$ auch als ein ausgezeichnetes Pseudopolynom, und hiermit ist dieser Teil des Satzes bewiesen.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Zerfällt nämlich $f(x, y)$ in das Produkt zweier Pseudopolynome, je von positivem Grade, so wird jeder Faktor nach dem 2. Satze, § 5, auch ein ausgezeichnetes Pseudopolynom, was eben die analytische Zerlegbarkeit von $f(x, y)$ nach sich zieht.

Darnach kann man im Falle eines ausgezeichneten Pseudopolynoms schlechtweg von der Irreduktibilität reden, da sich die analytische und die algebraische Irreduktibilität hier eben decken.

3. Satz. *Verschwindet ein ausgezeichnetes Pseudopolynom $f(x, y)$ mit der Spitze $(c_1, \ldots, c_n)$ für alle in der Nähe der Stelle $(0, c_1, \ldots, c_n)$ gelegenen Stellen, wofür ein irreduktibles ausgezeichnetes Pseudopolynom $\varphi(x, y)$ mit gleicher Spitze verschwindet, so ist $f(x, y)$ durch $\varphi(x, y)$ teilbar.*

Wäre der Satz nicht richtig, so ziehe man die Relation (2), § 6, heran. Dann kann man $(y) = (y')$ so wählen, daß einerseits $R(y') \neq 0$ ist, während andererseits $\varphi(x, y')$ eine Wurzel $x = x'$ zuläßt, derart, daß der Punkt (x', y') in der genannten Umgebung liegt. Da nun auch $f(x', y') = 0$ ist, so ist man hiermit zu einem Widerspruch geführt.

Diesem letzten Satze kann man noch eine allgemeinere Formulierung erteilen. Der vorstehende Beweis reicht auch für diesen Fall hin.

4. Satz. *Seien $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ zwei ausgezeichnete Pseudopolynome mit gleicher Spitze (c), wovon das zweite irreduktibel ist. Dabei sollen sämtliche Koeffizienten im Bereiche*

$$\mathfrak{H}: \qquad |y_i - c_i| < h_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

analytisch sein. Ist (x^0, y^0) eine Nullstelle von φ, wo (y^0) in $\mathfrak{H}$ liegt, und verschwindet fernerhin f in jedem Punkte einer gewissen Umgebung von (x^0, y^0), in welchem φ verschwindet, so ist f durch φ algebraisch teilbar.

§ 8. Beweis des Hauptsatzes. Weitere Sätze.

Wir sind nunmehr in der Lage, den Beweis des Hauptsatzes, § 4, zu erbringen. Der Satz ist, wie bereits bemerkt, invariant gegenüber einer ganzen nicht-spezialisierten linearen Transformation

aller Argumente. Vermöge einer solchen Transformation läßt sich nun $F(z_1, \ldots, z_n)$ in eine Funktion $\mathfrak{F}(x, y)$ überführen, worauf der Vorbereitungssatz anwendbar ist:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{F}(x, y) = f(x, y)\,\Omega(x, y),$$

wobei dem Punkte $(z) = (a)$ der Anfang $(x, y) = (0, 0)$ entspricht und $f(x, y)$ ein ausgezeichnetes Pseudopolynom ist.

Zerlegt man hier $f(x, y)$ in irreduktible Faktoren, so ergibt sich damit der Beweis des ersten Teiles des Satzes — daß nämlich mindestens eine Zerlegung in irreduktible Faktoren möglich ist.

Nehmen wir nun an, es seien zwei derartige Zerlegungen vorgelegt:

$$\begin{aligned} F(z_1, \ldots, z_n) &= [F_1(z_1, \ldots, z_n)]^{\lambda_1} \ldots [F_l(z_1, \ldots, z_n)]^{\lambda_l} \\ &= [\Phi_1(z_1, \ldots, z_n)]^{\mu_1} \ldots [\Phi_m(z_1, \ldots, z_n)]^{\mu_m}. \end{aligned}$$

Vermöge einer geeigneten linearen Transformation kann man dann erreichen, daß jeder dieser Faktoren in eine Funktion übergeht, worauf der Vorbereitungssatz anwendbar ist. Daraus ergibt sich, daß die transformierte Funktion folgende Darstellung zuläßt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, y) &= [f_1(x, y)]^{\lambda_1} \ldots [f_l(x, y)]^{\lambda_l}\,\Omega(x, y) \\ &= [\varphi_1(x, y)]^{\mu_1} \ldots [\varphi_m(x, y)]^{\mu_m}\,\mathrm{X}(x, y), \end{aligned}$$

wobei jede Klammer ein ausgezeichnetes Pseudopolynom umfaßt, und Ω, X im Anfang nicht verschwinden.

Aus der Gleichung

$$[\varphi_1(x, y)]^{\mu_1} \ldots [\varphi_m(x, y)]^{\mu_m} = \frac{\Omega(x, y)}{\mathrm{X}(x, y)} [f_1(x, y)]^{\lambda_1} \ldots [f_l(x, y)]^{\lambda_l}$$

schließt man weiter mit Hilfe des 3. Satzes von § 5 nebst dem Zusatze, daß $\dfrac{\Omega(x, y)}{\mathrm{X}(x, y)}$ nicht von x abhängt, und da außerdem dieser Bruch im Anfang nicht verschwindet, so steht auch rechter Hand ein ausgezeichnetes Pseudopolynom. Jetzt braucht man nur noch den 1. Satz von § 7 heranzuziehen, und der Beweis ist fertig.

Aus den voraufgehenden Entwicklungen ergeben sich noch die folgenden Sätze.

1. Satz. *Ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) analytisch und verschwindet F in jedem Punkte einer bestimmten Umgebung von (a),*

in welchem eine in (a) *irreduktible Funktion* $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ *verschwindet, so ist* F *im Punkte* (a) *durch* Φ *teilbar.*

1. Zusatz. *Sind* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *und* $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ *zwei im Punkte* (a) *irreduktible Funktionen und ist jede in einer bestimmten Umgebung von* (a) *belegene Wurzel der einen Funktion auch eine Nullstelle der anderen, so sind die beiden Funktionen im Punkte* (a) *miteinander äquivalent.*

2. Zusatz. *Sind* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *und* $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ *zwei im Punkte* $(z) = (a)$ *analytische Funktionen, wovon keine identisch verschwindet, und verschwindet* F *in jedem Punkte der Umgebung von* (a), *in welchem* Φ *verschwindet, so ist* F *durch jeden irreduktiblen Faktor von* Φ *teilbar.*

Dem 1. Satze kann man noch eine allgemeinere Formulierung erteilen.

2. Satz. *Seien* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *und* $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ *beide im Punkte* (a) *analytisch, und sei* Φ *dort auch irreduktibel. Gibt es dann in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle* (a) *einen Nullpunkt* (a') *der Funktion* Φ *derart, daß* F *in jedem Punkte einer gewissen Umgebung von* (a') *verschwindet, in welchem* Φ *verschwindet, so ist* F *im Punkte* (a) *durch* Φ *teilbar.*

Entsprechende Erweiterungen haben auch für die Zusätze statt.

§ 9. Von der Resultante und der Diskriminante.

Seien $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ zwei Pseudopolynome je von positivem Grade und gleicher Spitze $(c_1, \ldots, c_n) = (c)$, und sei der Koeffizient des höchsten Gliedes eines jeden im Punkte (c) von 0 verschieden. Wir bilden für dieselben den Euklidischen Algorithmus des größten gemeinsamen Teilers und bezeichnen den letzten Rest mit $R_{\varrho+1}(y)$. Derselbe verhält sich analytisch in (c).

Unter der *Resultante* von f und φ wollen wir die Funktion $R_{\varrho+1}(y)$ verstehen. Jede andere Funktion, welche in (c) mit $R_{\varrho+1}(y)$ äquivalent ist, darf auch als die Resultante angesehen werden. Wir drücken ein früheres Resultat bloß in neuer Form durch folgenden Satz aus.

1. Satz. *Damit die genannten Pseudopolynome* $f(x, y)$ *und* $\varphi(x, y)$ *einen gemeinsamen Teiler haben, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Resultante identisch verschwindet.*

Auf den Fall, daß die Resultante nicht identisch verschwindet, gehen wir unten in § 13 näher ein.

Die Diskriminante. Sei $f(x, y)$ ein Pseudopolynom, dessen Grad mindestens 2 beträgt, und sei der Koeffizient des höchsten Gliedes desselben in der Spitze von 0 verschieden. Unter der *Diskriminante* $D(y)$ verstehen wir dann die Resultante von

$$f(x, y) \qquad \text{und} \qquad f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

2. Satz. *Sei $f(x, y)$ ein Pseudopolynom der genannten Art, dessen Diskriminante $D(y)$ nicht identisch verschwindet, und sei (y') eine Stelle, wofür $D(y') \neq 0$ ist. Dann hat $f(x, y')$ lauter getrennte Wurzeln.*

3. Satz. *Damit zwei der irreduktiblen Faktoren, woraus ein zerfallendes ausgezeichnetes Pseudopolynom $f(x, y)$ mit der Spitze in (c) besteht, im Punkte $(0, c_1, \ldots, c_n)$ miteinander äquivalent seien, ist notwendig und hinreichend, daß $D(y)$ identisch verschwindet.*

§ 10. Über das durch das Verschwinden eines ausgezeichneten Pseudopolynoms definierte Gebilde.

Gegeben sei die Gleichung

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) \equiv w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0, \tag{1}$$

wobei F ein irreduktibles Pseudopolynom bedeutet, dessen Spitze im Anfang liegt und dessen Koeffizienten A_k sich in jedem inneren und Randpunkte des Bereiches

$$S: \qquad |z_i| < h, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhalten. Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus, daß F ausgezeichnet sei, da dies ja durch eine Transformation $w' = w - b$ zu erreichen ist. Aus dem Bereiche S heben wir die Punkte fort, in denen die Diskriminante D verschwindet:

$$D(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{2}$$

und bezeichnen den dadurch entstehenden Bereich mit T. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein beliebiger Punkt von T. Dann gibt es nach Kap. 1, § 6, eine bestimmte innerhalb T gelegene Umgebung dieses Punktes:

$$|z_i - a_i| < \delta, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

derart, daß die den Punkten desselben entsprechenden m Werte von w sich zu m daselbst analytischen Funktionen $w_1, \ldots, w_m$ zusammenfassen lassen. Und nun behaupte ich: *Jede dieser Funktionen läßt sich längs eines geeigneten innerhalb T gelegenen Weges in jede andere derselben analytisch fortsetzen.*

Zum Beweise gehe man etwa von w_1 aus und setze man dieses Funktionselement auf beliebigen innerhalb T gelegenen Wegen analytisch fort. So werden den Punkten von T je k getrennte Funktionswerte zugeordnet, und zwar lassen sich dieselben in der Nähe einer beliebigen Stelle von T stets zu k daselbst analytischen Funktionen zusammenfassen. In der Nähe der Ausgangsstelle (a) mögen diese Funktionselemente $w_1, \ldots, w_k$ heißen. Es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, daß $k = m$ ist.

Wird dies nicht zugestanden, so bilden wir die symmetrischen Ausdrücke

$$\begin{aligned} -P_1 &= w_1 + w_2 + \cdots + w_k, \\ P_2 &= w_1 w_2 + w_1 w_3 + \cdots + w_{k-1} w_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm P_k &= w_1 w_2 \ldots w_k. \end{aligned}$$

Wie man sieht, verhält sich jedes P_i im Punkte (a) analytisch und läßt sich auch in jeden Punkt von T analytisch fortsetzen. Des weiteren bleibt P_i eindeutig und endlich[1]) in T. Nach dem erweiterten Riemannschen Satze betreffend hebbare Unstetigkeiten, Kap. 3, § 3, läßt sich P_i somit auch in die Punkte des Gebildes (2) analytisch fortsetzen. Darum verhält sich P_i im ganzen Bereiche S analytisch.

Bildet man jetzt die Funktion

$$(4) \quad (w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_k) = w^k + P_1 w^{k-1} + \cdots + P_k,$$

und bezeichnet man mit $\Phi(w, z_1, \ldots, z_n)$ denjenigen im Anfange irreduktiblen Teiler dieses Pseudopolynoms, welcher im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ verschwindet, wo b den Wert des Funktionsele-

1) Daß die Wurzeln von (1) im Bereich S endlich bleiben, erkennt man, wie folgt. Sei $w \neq 0$ eine dieser Wurzeln, und man setze $w' = 1/w$. Dann genügt w' der Gleichung

$$1 + A_1 w' + \cdots + A_m w'^m = 0.$$

Da nun die Koeffizienten endlich bleiben, so kann $|w'|$ offenbar nicht beliebig klein werden.

ments w_1 im Punkte (a) bedeutet, so erkennt man, daß F in jedem Punkte $(w, z_1, \ldots, z_n)$ der Umgebung von $(b, a_1, \ldots, a_n)$ verschwindet, worin Φ verschwindet. Nach dem letzten Satze von § 8 muß F demnach im Anfange durch Φ teilbar sein. Dies verstößt aber gegen die Voraussetzung, daß F irreduktibel sei, denn der Grad von Φ ist nicht höher als k, also sicher kleiner als m.

Auf Grund des soeben erhaltenen Resultates erkennt man, daß die Stellen $(w, z_1, \ldots, z_n)$, wobei $(z_1, \ldots, z_n)$ beliebig innerhalb S gewählt wird und w eine willkürliche Wurzel von (1) bedeutet, eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit bilden. Dieselbe wollen wir als ein *pseudoalgebraisches Gebilde* bezeichnen. Sie wird auch als ein *Element eines analytischen Gebildes n-ter Stufe im Raume von $n+1$ Variabelen* benannt; vgl. § 27. Allgemeiner bezieht sich letztere Bezeichnung auch auf jede Mannigfaltigkeit, welche aus einem den Anfang enthaltenden Stücke derselben durch eine nicht-singuläre lineare bzw. umkehrbar eindeutige analytische Transformation hervorgeht.

Gewöhnliche und reguläre Stellen. Für spätere Zwecke sind folgende Klassifikationen von Wichtigkeit. Ein Punkt $(w', z'_1, \ldots, z'_n)$ des Gebildes (1) heißt eine *gewöhnliche Stelle* desselben, falls die Diskriminante $D(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(z'_1, \ldots, z'_n)$ nicht verschwindet:

$$D(z'_1, \ldots, z'_n) \neq 0.$$

Ist es möglich, jedem Punkte (z) einer bestimmten Nachbarschaft eines Punktes $(z') = (z'_1, \ldots, z'_n)$ eine Wurzel w von (1) zuzuordnen, derart, daß diese Werte eine im Punkte (z') analytische Funktion bilden, und bezeichnet man den Wert der Funktion im Punkte (z') mit w', so heißt der Punkt $(w', z'_1, \ldots, z'_n)$, sofern er als ein der genannten Funktion zugehöriger Zahlenkomplex betrachtet wird, eine *reguläre Stelle* des Gebildes (1).

Jede gewöhnliche Stelle ist offenbar auch eine reguläre Stelle. Das Umgekehrte trifft indessen nicht stets zu. So ist beispielsweise beim Gebilde

$$z^2 - x^2 y = 0$$

jede Stelle $(x, y, z) = (0, b, 0)$, wobei $b \neq 0$ ist, eine reguläre, nicht aber eine gewöhnliche Stelle des Gebildes.

§ 11. Vom zugehörigen Riemannschen Raume.

Wir wollen jetzt beweisen, daß über eine $2n$-dimensionale Umgebung der Stelle $(z) = (0)$ ein m-blätteriger Riemannscher Raum ausgebreitet werden kann, worin die m Bestimmungen der Funktion w eindeutig und stetig verlaufen.

Sei $\Delta(z_1, \ldots, z_n)$ das Produkt der im Anfange irreduktiblen Faktoren von D, (2), jeden nur einmal gezählt. Nachdem man nötigenfalls eine lineare Transformation auf die $z_1, \ldots, z_n$ ausgeübt hat, kann man Δ als ein ausgezeichnetes (aber nicht notwendig irreduktibles) Pseudopolynom voraussetzen, womit denn das Gebilde $D = 0$, wie folgt, dargestellt wird:

$$z_n = \eta, \qquad z_k = \xi_k, \qquad {\scriptstyle k = 1, 2, \ldots, n-1 = r,}$$

(5) $$\Delta = \eta^\mu + \gamma_1(\xi)\eta^{\mu-1} + \cdots + \gamma_\mu(\xi) = 0.$$

Sei G eine positive Zahl, und sei G' eine zweite an die Relation $0 < G' < G$ gebundene Größe. Dann möge h so angenommen werden, daß, sobald nur (ξ) ein Punkt des Bereiches

σ: $$|\xi_k| < h, \qquad {\scriptstyle k = 1, 2, \ldots, r,}$$

ist, alle dem Punkte (ξ) entsprechenden Wurzeln von (5) der Bedingung

$$|\eta| < G'$$

genügen. Im übrigen mögen G, h so klein angenommen werden, daß die Koeffizienten von F sich alle im Bereiche $|\eta| < G$, $|\xi_k| < h$ analytisch verhalten. — Den Zylinderbereich

τ: $$|\eta| < G, \qquad |\xi_k| < h, \qquad {\scriptstyle k = 1, \ldots, r,}$$

wollen wir nun so aufschneiden, daß das dadurch resultierende Gebiet τ' ein *Blatt* des zu konstruierenden Riemannschen Raumes abgibt.

Sei (ξ) ein beliebiger Punkt von σ, und seien $\eta', \eta'', \ldots, \eta^{(\mu)}$ die entsprechenden Wurzeln von (5). Dann liegen die Punkte $\eta^{(k)}$ alle im Kreise $|\eta| < G'$. Von jedem dieser Punkte ziehen wir eine Parallele zur imaginären Achse bis auf den Kreis $|\eta| = G$ herunter. Setzt man nämlich

$$\eta = u + vi, \qquad \eta^{(k)} = u^{(k)} + iv^{(k)},$$

$$\zeta = u^{(k)} + ti, \qquad -\sqrt{G^2 - u^{(k)2}} < t \leqq v^{(k)},$$

so werden die Punkte ζ die genannten Strecken durchlaufen.

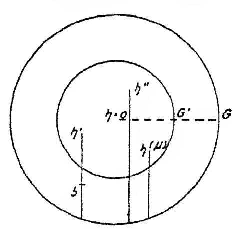

Fig. 1.

Jetzt heben wir aus dem $2n$-dimensionalen Bereiche τ die $(2n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$: $\{(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_r)\}$ fort. *Dann bilden die zurückbleibenden Punkte* $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ *von* τ *einen linear einfach zusammenhängenden Bereich* τ'.

In der Tat sei

$$L: \qquad \eta = f(\lambda) + i\varphi(\lambda), \quad \xi_k = f_k(\lambda) + i\varphi_k(\lambda), \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad {\scriptstyle k=1,\ldots,r,}$$

eine beliebige einfache geschlossene reguläre, in τ' verlaufende Kurve. Dann läßt sich L stetig auf einen inneren Punkt von τ' zusammenziehen, ohne den Rand von τ' zu treffen.

Um dies nachzuweisen, werde L, wie folgt, umgeformt. Wir definieren eine Kurve L' durch die Formeln:

$$L': \qquad \xi_k = f_k(\lambda) + i\varphi_k(\lambda), \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,r;}$$

$$\eta = f(\lambda) + i\{[\varphi(\lambda) - \Phi(\lambda)]\,\alpha + \Phi(\lambda)\}, \qquad 0 < \alpha \leqq 1,$$

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{G^2 - f(\lambda)^2}\,; \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Dabei bleibt L' stets regulär und einfach, und fällt für $\alpha = 1$ mit L zusammen. Indem man nun α genügend weit gegen null abnehmen läßt, kann man erreichen, daß die Kurve

$$\eta = f(\lambda) + i\,\{[\varphi(\lambda) - \Phi(\lambda)]\alpha + \Phi(\lambda)\}$$

innerhalb des Kreisringes

$$G' < |\eta| < G,$$

und zwar innerhalb der oberen Hälfte desselben, $0 < v$, zu liegen kommt. Sei $\alpha = \alpha_0 > 0$ ein Wert, wofür dies eintritt.

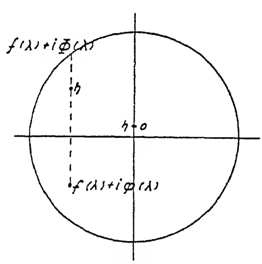

Fig. 2.

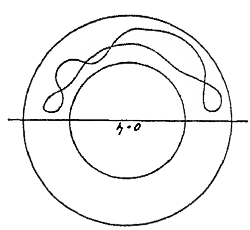

Fig. 3.

Die Kurve L'_0, welche diesem Wert von α entspricht, liegt aber schon in einem linear einfach zusammenhängenden Zylinderbereich:

$$G' < |\eta| < G, \qquad 0 < v; \qquad |\xi_k| < h, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,r,}$$

womit denn der Beweis erbracht ist.

Jedem Punkte $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ des Bereiches τ' entsprechen m verschiedene Wurzeln der Gleichung (1). Nach der auf der Hand liegenden Verallgemeinerung des Satzes von Bd. I, Kap. 8, § 10 lassen sich dieselben zu m eindeutigen in τ' analytischen Funktionen — *Zweigen* — zusammenfassen. Jeder dieser Funktionen werde nun ein Blatt τ'_j des zu konstruierenden Riemannschen Raumes zugeordnet. Diese Blätter stoßen dann längs jener $(2n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zusammen und werden nun geradeso miteinander verbunden, wie im Falle $n=1$.

Dem Verzweigungspunkte im Falle $n=1$ entspricht hier eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und zwar deckt sich dieselbe im allgemeinen mit dem Gebilde (5).[1] Es kann indessen vorkommen, daß ein Teil dieses Gebildes der analytischen Fortsetzung eines Zweiges kein Hindernis entgegenstellt. Man macht sich das alles klar an der Hand des Beispiels

$$z^2 - x^2 y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad z^2 - (y+x)^2(y-x) = 0.$$

Der soeben hergestellte Riemannsche Raum möge mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden. Er besteht aus einem Stücke. Unter einem *regulären Punkte* von $\mathfrak{S}$ verstehen wir im Anschluß an die Definitionen des vorhergehenden Paragraphen einen solchen, welcher nicht zum Verzweigungsgebilde gehört. In der Umgebung eines regulären Punktes verläuft das zugehörige Blatt schlicht, und die zugehörige Bestimmung der Funktion w verhält sich dort analytisch.

Dagegen soll $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ eine *gewöhnliche Stelle* von $\mathfrak{S}$ heißen, falls die Diskriminante von (1) in diesem Punkte nicht verschwindet, d. h. $\Delta \neq 0$.

§ 12. Über Funktionen am pseudoalgebraischen Gebilde.

Den Punkten eines irreduktiblen pseudoalgebraischen Gebildes $\mathfrak{G}$:

$$(1) \qquad F(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

dessen Spitze im Anfange liegt, werden Funktionswerte W zugeordnet. Dann heißt W auf $\mathfrak{G}$ *eindeutig*, falls jedem Punkte von $\mathfrak{G}$ im allgemeinen ein Wert W zugeordnet wird; dabei bilden die Ausnahmepunkte eine Menge, deren $(z_1, \ldots, z_n)$-Koor-

1) Näheres hierüber findet sich unten in § 15.

dinaten Punkte einer stetigen $2k$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmen, $k \leqq n-1$.

Ist $(b, a_1, \ldots, a_n) = (b, a)$ eine reguläre Stelle von $\mathfrak{G}$, so heißt W *analytisch in* (b, a), falls die der Umgebung von (b, a) zugehörigen Werte von W eine im Punkte $(z) = (a)$ analytische Funktion der Argumente $z_1, \ldots, z_n$ bilden.

Die Funktion nähert sich einem *Grenzwerte* A im Anfange, falls W eindeutig auf $\mathfrak{G}$ ist und einem beliebig kleinen positiven ε ein positives δ zugeordnet werden kann, derart, daß

$$|W - A| < \varepsilon$$

bleibt, sofern nur $|z_i| < \delta$, $i=1,\ldots,n$, und $\Sigma |z_i| > 0$ ist, gleichviel welcher Wert W dem Punkte (z) zugeordnet wird. Sie heißt *stetig* im Anfange, falls sie in der Nähe des Anfangs ausnahmslos auf $\mathfrak{G}$ definiert ist und einem Grenzwerte zustrebt, welcher mit ihrem Werte dort übereinstimmt. Ist nun (b, a) eine beliebige Stelle von $\mathfrak{G}$, so sei $F_1(w, z_1, \ldots, z_n)$ derjenige in (a) irreduktible Faktor von $F(w, z_1, \ldots, z_n)$, welcher dieser Stelle von $\mathfrak{G}$ entspricht. Dann werden die Definitionen von Grenzwert und Stetigkeit hinsichtlich der Funktion W an der Stelle (b, a) erhalten, indem man bei den vorstehenden Definitionen das Gebilde $F = 0$ durch das Gebilde $F_1 = 0$ ersetzt.

Insbesondere erweist sich die Funktion $W = w$ als stetig auf $\mathfrak{G}$. In der Spitze fallen nämlich sämtliche Wurzeln der Gleichung (1) zusammen, sonst müßte die Funktion $F(w, z)$ nach dem Vorbereitungssatze zerfallen. Und nun folgt aus den Entwicklungen von § 1, daß w im Anfange stetig ist. Mithin ist w überall stetig auf $\mathfrak{G}$.

1. Satz. *Jedem gewöhnlichen Punkte eines irreduktiblen pseudoalgebraischen Gebildes $\mathfrak{G}$ werde ein Wert W zugeordnet, und zwar soll sich W dort analytisch verhalten. Bleibt W außerdem endlich auf $\mathfrak{G}$, so nähert sich W einem Grenzwerte in jeder nicht-gewöhnlichen Stelle von $\mathfrak{G}$. Indem W an den letztgenannten Stellen noch durch diesen Grenzwert definiert wird, bleibt die also ergänzte Funktion in den singulären Stellen von $\mathfrak{G}$ stetig.*

2. Satz. *Die im vorhergehenden Satze betrachtete ergänzte Funktion W genügt ausnahmslos einer irreduktiblen pseudoalgebraischen Gleichung*

$$\Psi(W, z_1, \ldots, z_n) = W^p + B_1 W^{p-1} + \cdots + B_p = 0, \quad p = \frac{m}{\varkappa}, \quad 1 \leqq \varkappa. \tag{2}$$

Wir beweisen den 2. Satz zuerst, indem wir von einer gewöhnlichen Stelle $(b, a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathfrak{G}$ ausgehen und die m Werte von W an den m übereinander liegenden Stellen $(z) = (a)$ von $\mathfrak{G}$, $W_1, \ldots, W_m$, zu den m elementaren symmetrischen Funktionen

$$W_1 + \cdots + W_m,$$
$$W_1 W_2 + \cdots + W_{m-1} W_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$W_1 W_2 \ldots W_m$$

zusammenfassen. Jede derselben verhält sich analytisch in (a) und gestattet eine analytische Fortsetzung zunächst über den ganzen Bereich hin, in welchem die Koeffizienten $A_i(z_1, \ldots, z_n)$ sich analytisch verhalten, bis auf die Punkte dieses Bereiches, in denen die Diskriminante von $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ verschwindet. Da die bewußten Funktionen aber eindeutig sind und auch in diesen Punkten endlich bleiben, so haben sie dort nach dem verallgemeinerten Riemannschen Satze, Kap. 3, § 3 höchstens hebbare Singularitäten und lassen sich somit auch in diese Punkte analytisch fortsetzen.

Hiermit ist nun gezeigt, daß die einer beliebigen gewöhnlichen Stelle $(z) = (a)$ der Umgebung des Anfangs entsprechenden Werte von W einer Gleichung von der Form genügen:

$$W^m + C_1 W^{m-1} + \cdots + C_m = 0, \tag{3}$$

wo $C_k(z_1, \ldots, z_n)$ sich im Anfange analytisch verhält. Ist diese Gleichung irreduktibel, so definiert sie eine Funktion, welche überall stetig auf $\mathfrak{G}$ ist und sonach mit der vorgelegten Funktion W identisch wird.

Im anderen Falle genügen die der Umgebung der genannten Stelle (b, a) entsprechenden W-Werte einer Gleichung

$$W^p + B_1 W^{p-1} + \cdots + B_p = 0, \tag{4}$$

deren linke Seite ein irreduktibler Faktor der linken Seite von (3) ist. Da nun alle analytischen Fortsetzungen dieses Ausgangselements der Funktion W nach den gewöhnlichen Stellen von $\mathfrak{S}$ hin stets noch der Gleichung (4) genügen müssen, so erkennt man, daß die linke Seite von (3) keinen irreduktiblen Faktor besitzen könnte, welcher mit diesem nicht äquivalent wäre; vgl. 2. Satz, § 8.

In den vorstehenden Entwicklungen ist auch der Beweis des 1. Satzes mit enthalten.

3. Satz. *Die im 1. Satze betrachtete Funktion W läßt sich in jeder gewöhnlichen Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}$ durch die Formel darstellen:*

$$(5) \qquad W = \frac{G(w, z_1, \ldots, z_n)}{F'(w, z_1, \ldots, z_n)}, \qquad F' = \frac{\partial F}{\partial w}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{G}$ ein Pseudopolynom höchstens vom Grade $m-1$, welches in allen zum Gebilde $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkten der Umgebung der Spitze von F, worin $F' = 0$ ist, verschwindet.

Zum Beweise bilde man die Ausdrücke:

$$(6) \qquad \begin{array}{rl|l} W_1 + \cdots + W_m & = P_0, & B_{m-1}, \\ w_1 W_1 + \cdots + w_m W_m & = P_1, & B_{m-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ w_1^{m-1} W_1 + \cdots + w_m^{m-1} W_m & = P_{m-1}. & B_0 = 1. \end{array}$$

Hierbei ist P_k in allen Punkten von T (§ 10) eindeutig erklärt und analytisch und bleibt fernerhin endlich in T. Nach dem verallgemeinerten Riemannschen Satze, Kap. 3, § 3, kann P_k also nur hebbare Unstetigkeiten in S aufweisen, und P_k läßt sich somit zu einer in S analytischen Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ ergänzen.

Indem wir uns zunächst auf die Umgebung einer Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ von T beschränken, ziehen wir die Formeln heran:

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = (w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_m),$$

$$F'(w_1, z_1, \ldots, z_n) = (w_1 - w_2)(w_1 - w_3) \ldots (w_1 - w_m).$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= (w - w_2)(w - w_3) \ldots (w - w_m) \\ &= w^{m-1} - (w_2 + w_3 + \cdots + w_m) w^{m-2} + \cdots \pm (w_2 w_3 \ldots w_m) \\ &= w^{m-1} + (A_1 + w_1) w^{m-2} + \cdots \\ &= w^{m-1} + B_1 w^{m-2} + \cdots B_{m-1}, \end{aligned}$$

wobei B_k sich aus $A_1, \ldots, A_m$ und w_1 rational und ganz zusammensetzt, und zwar ist B_k vom Grade k in w_1. Im übrigen ist

$$\Phi(w_1) = F'(w_1, z_1, \ldots, z_n), \qquad \Phi(w_k) = 0, \qquad {\scriptstyle k=2,\ldots,m.}$$

Nunmehr werde die k-te der Gleichungen (6), wie angedeutet, mit B_{m-k} multipliziert, und man addiere die also modifizierten Gleichungen zusammen. So kommt:

$$(w_1^{m-1} + B_1 w_1^{m-2} + \cdots + B_{m-1}) W_1 = G(w_1, z_1, \ldots, z_n),$$

$$W_1 = \frac{G(w_1, z_1, \ldots, z_n)}{F'(w_1, z_1, \ldots, z_n)},$$

wobei G ein Pseudopolynom bedeutet.

Hiermit haben wir die in Aussicht genommene Darstellung der Funktion W zunächst bloß für die Umgebung einer besonderen gewöhnlichen Stelle $(b_1, a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathfrak{G}$ erhalten. Da nun aber die Formel eine analytische Fortsetzung längs eines beliebigen in T gelegenen Weges gestattet, so gilt die Darstellung damit allgemein. Im übrigen folgt aus der Endlichkeit von W, daß der Zähler in jeder Nullstelle des Nenners verschwinden muß.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß die Darstellung (5) selbst in solchen Punkten $(w_k, z_1, \ldots, z_n)$, in welchen $D(z_1, \ldots, z_n) = 0$ ist, noch gilt, sofern w_k nur eine einfache Wurzel von F ist, da F' in einem derartigen Punkte nicht verschwindet, und beide Seiten der Gleichung (5) sich dort also analytisch verhalten.

Die Darstellung (5) wird indessen nicht immer in allen regulären Punkten von $\mathfrak{G}$ gelten, da es eben vorkommen kann, daß zwei Mäntel der Hyperfläche (1) einander durchsetzen, ohne dabei verzweigt zu sein, nach Art der Kurve

$$y^2 = x^2(1 + x)$$

im Anfang.

Es liegt die Vermutung nahe, daß W sich auch in der Form eines Pseudopolynoms darstellen läßt. Dies trifft indessen nicht stets zu, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$w^2 = z_1^3, \qquad W = \frac{w}{z_1}.$$

Immerhin kann man leicht zeigen, daß W stets in der Form

$$W = \frac{G(w, z_1, \ldots, z_n)}{A(z_1, \ldots, z_n)}$$

darstellbar ist, wobei G und A Pseudopolynome mit der nämlichen Spitze bedeuten, und zwar wird A nur aus solchen in der Spitze von (1) irreduktiblen Faktoren bestehen, welche auch in der Diskriminante von (1) auftreten. Die Darstellung gilt nur für gewöhnliche Punkte.

§ 13. Das System mehrerer pseudoalgebraischen Funktionen.

Seien l Funktionen $w_1, \ldots, w_l$ durch die l Gleichungen:

$$(1) \quad F_k(w_k, z_1, \ldots, z_n) = w_k^{m_k} + A_1^{(k)} w_k^{m_k - 1} + \cdots + A_m^{(k)} = 0, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

definiert, wobei F_k ein ausgezeichnetes irreduktibles Pseudopolynom bedeutet, dessen Spitze im Anfang liegt. Dann wird im allgemeinen jede dieser Funktionen einer verschiedenen Riemannschen Hyperfläche bedürfen. Man kann aber stets ein Gebilde $\mathfrak{G}$:

$$(2) \qquad F(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0$$

finden, an welchem jede Funktion w_k eindeutig ist, und zwar gehören zu zwei übereinander gelegenen regulären Punkten der entsprechenden Riemannschen Hyperfläche $\mathfrak{S}$ stets verschiedene Systeme von Zweigen $(w_1', \ldots, w_l')$, $(w_1'', \ldots, w_l'')$, ... Dabei bedeutet $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ ein irreduktibles ausgezeichnetes Pseudopolynom, dessen Spitze im Anfang liegt. Demgemäß läßt sich jede der vorgelegten Funktionen w_k nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen durch w darstellen.

Zum Beweise sei

$$S: \qquad |z_i| < h, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ein Bereich, in welchem jeder Koeffizient $A_i^{(k)}$ sich analytisch verhält. Aus S hebe man die Punkte fort, in denen die verschiedenen Diskriminanten der l Funktionen (1) verschwinden, und bezeichne den übrigen Teil von S mit T. Ist (a) ein Punkt von T, so werden sich sämtliche Wurzeln der l Gleichungen (1) zu in (a) analytischen, voneinander verschiedenen Funktionen zusammenfassen lassen, und zwar werden die m_k Wurzeln der k-ten Gleichung daselbst getrennte Werte annehmen:

$$w_k^{(i)}\big|_{(a)} = b_k^{(i)}, \qquad b_k^{(i)} \neq b_k^{(j)}, \qquad i \neq j.$$

Jetzt greife man willkürlich, jedem Werte von k entsprechend, eine dieser Funktionen $w_k^{(1)}$, $k = 1, \ldots, l$, heraus und bilde man die Funktion:

$$(3) \qquad w^{(1)} = \alpha_1 w_1^{(1)} + \cdots + \alpha_l w_l^{(1)},$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ willkürliche Konstanten bedeuten. Sei L eine von (a) ausgehende, in T verlaufende und nach (a) zurückkehrende Kurve, längs deren also jedes der Funktionselemente $w_k^{(1)}$ eine analytische Fortsetzung gestattet, und sei $w_k^{(2)}$ die neue Bestim-

mung von $w_k^{(1)}$ im Punkte (a). Fällt nun $w_k^{(2)}$ für alle Werte von k nicht mit $w_k^{(1)}$ identisch aus, so wird mindestens eine der Differenzen

$$b_1^{(1)} - b_1^{(2)}, \ldots, b_l^{(1)} - b_l^{(2)}$$

von null verschieden sein. Der Wert $b^{(2)}$ von $w^{(2)}$ im Punkte (a) wird dann vom Werte $b^{(1)}$ der Funktion $w^{(1)}$ daselbst verschieden sein, falls nur

$$(4) \qquad \alpha_1(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}) + \cdots + \alpha_l(b_l^{(1)} - b_l^{(2)}) \neq 0.$$

Durch geeignete Wahl der α_k ist dies stets zu erreichen.

Wenn man alle möglichen derartigen Wege L in Betracht zieht, so gewinnt man dadurch ja nur eine endliche Anzahl verschiedener Systeme analytischer Fortsetzungen $(w_1^{(i)}, \ldots, w_l^{(i)})$.[1]) Damit die entsprechenden Fortsetzungen $w^{(i)}$ ebenfalls getrennt ausfallen, genügt also, daß eine endliche Anzahl von Ungleichungen der Form (4) zwischen den α erfüllt werden. Bekanntlich ist dies stets zu erreichen.

Ist insbesondere $(\alpha^0) = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_l^0)$ eine mögliche Wahl, so wird offenbar jedes System (α), welches in einer geeigneten Nachbarschaft des Punktes (α^0) liegt, auch eine brauchbare Wahl der α liefern. Ist ferner $(\bar{\alpha})$ ein beliebiges System von l Zahlen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l$, so wird es in jeder Umgebung von $(\bar{\alpha})$ einen Punkt (α) geben, wofür die Ungleichungen (4) statthaben.

Sei also $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ eine besondere brauchbare Wahl der α. Dann wird die dazu gehörige Funktion $w^{(1)}$ Wurzel einer Gleichung von der Form sein:

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

wobei F ein irreduktibles ausgezeichnetes Pseudopolynom ist, dessen Spitze im Anfang liegt. Der Beweis wird gerade so geführt, wie beim 2. Satze, § 12. An dem hiermit definierten pseudoalgebraischen Gebilde wird jede der Funktionen w_k eindeutig sein. Des weiteren gehören zwei regulären übereinander liegenden Punkten der zugehörigen Riemannschen Hyperfläche zwei getrennte Systeme von Funktionswerten $(w_1', \ldots, w_l')$ und $(w_1'', \ldots, w_l'')$ an.

1) Die extremen Fälle sind folgende: *i*) jede Bestimmung einer willkürlichen Funktion w_k kann mit jeder Bestimmung einer zweiten, ebenfalls willkürlich gewählten Funktion w_p im bewußten Komplex vorkommen. Dann ist w eine $m_1 m_2 \ldots m_l$-deutige Funktion; *ii*) mit einer willkürlichen Bestimmung w_k wird nur eine einzige Bestimmung jeder weiteren w_p verknüpft. Alsdann ist w eine $m_1 = m_2 = \cdots = m_l$-wertige Funktion.

Geometrische Deutung. Faßt man die Variabelen $w_1, \ldots, w_l$, $z_1, \ldots, z_n$ als Koordinaten eines Punktes im komplexen Raume von $l+n$ Dimensionen auf, so definieren die l Gleichungen (1) ein Gebilde l-ter Stufe in diesem Raume. Der Gleichung (3) entspricht dann eine lineare Transformation, wobei

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_l w_l.$$

Ist hier etwa $\alpha_1 \neq 0$, so können die weiteren Gleichungen der Transformation, wie folgt, lauten:

$$w'_k = w_k, \quad {\scriptstyle k=2,\ldots,l;} \qquad z'_i = z_i, \quad {\scriptstyle i=1,\ldots,n.}$$

Dann wird das Gebilde, auf das neue Koordinatensystem bezogen, durch eine einzige Gleichung (2) definiert, indem $w_2, \ldots, w_l$ eindeutige Funktionen an diesem Gebilde sind.

§ 14. Von den Nullstellen einer am Gebilde $\mathfrak{G}$ eindeutigen Funktion.

Das Gebilde $\mathfrak{g}$. Vorgelegt sei ein ausgezeichnetes irreduktibles pseudoalgebraisches Gebilde $\mathfrak{G}$, dessen Spitze im Anfange liegt:

$$(1) \qquad F(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0.$$

Gegeben sei ferner der Zylinder

$$(2) \qquad \psi(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ eine im Anfange irreduktible Funktion bedeutet. Bei nicht-singulärer Wahl des Koordinatensystems[1]) läßt sich die Fläche (2) auch in der Form darstellen,

$$(3) \qquad R(v, z_1, \ldots, z_r) = v^\nu + E_1 v^{\nu-1} + \cdots + E_\nu = 0,$$

$$v = z_n, \qquad r = n-1,$$

wo R ein ausgezeichnetes irreduktibles Pseudopolynom bedeutet, dessen Spitze im Anfange liegt.

Sei $(a_1, \ldots, a_r) = (a)$ ein Punkt, in welchem die Diskriminante von R nicht verschwindet, und sei v_1 eine in (a) analytische Funktion, welche der Gleichung (3) genügt. Setzt man

$$F(w, z_1, \ldots, z_r, v_1) = F_a(w, z_1, \ldots, z_r),$$

1) Genauer gesagt, nach eventueller Ausübung einer nicht-spezialisierten linearen Transformation unter den $z_1, \ldots, z_n$.

so ist F_a ein Pseudopolynom, dessen Spitze im Punkte $(z) = (a)$ liegt. Letzteres besteht aus einem Produkte in (a) irreduktibler Faktoren, und zwar dürfen wir annehmen, daß diese sämtlich linear in w sind und außerdem in (a) lauter verschiedene Wurzeln $c_1, c_2, \ldots$ haben. Bildet man nämlich das Produkt der irreduktiblen Faktoren von F_a, jeden nur einmal gezählt, so wird die Diskriminante desselben ja nicht identisch verschwinden. Daher kann man in jeder Nähe von (a) einen Punkt (a') finden, in welchem die Diskriminante nicht verschwindet, und nun braucht man (a) nur noch nach (a') zu verlegen.

Hieraus geht hervor, daß die sämtlichen der Umgebung von (a) entsprechenden Wurzeln von F_a sich zu in (a) analytischen Funktionen $w_1, w_2, \ldots$ zusammenfassen lassen. Demgemäß besteht der dieser Umgebung zugehörige Teil von 𝔊 aus einer endlichen Anzahl von Stücken:

(4)
$$w = w_i, \qquad v = v_1, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Jetzt gehen wir von den beiden Funktionselementen w_1, v_1 aus und betrachten die sämtlichen gleichzeitigen analytischen Fortsetzungen derselben. Die Fortsetzungen von v_1 werden stets der Gleichung (3) genügen. Aber auch die Fortsetzungen von w_1 werden eine analoge Gleichung, $\omega(w, z) = 0$, erfüllen, die sich, wie folgt, ergibt.

Seien $v_1, \ldots, v_\nu$ die der Umgebung von (a) entsprechenden Wurzeln von (3), und man bilde das Produkt:

$$\prod_{k=1}^{\nu} F(w, z_1, \ldots, z_r, v_k) = \overline{F}(w, z_1, \ldots, z_r).$$

Dann lassen sich die Koeffizienten von $\overline{F}$ über die ganze Umgebung des Anfangs analytisch fortsetzen, und $\overline{F}$ stellt somit ein ausgezeichnetes Pseudopolynom vor, dessen Spitze im Anfange liegt. Des weiteren verschwindet $\overline{F}$ identisch in der Nähe von (a), wenn $w = w_1$ gesetzt wird. Sei $\omega(w, z)$ derjenige im Anfange irreduktible Faktor von $\overline{F}$, der dieses identische Verschwinden von $\overline{F}$ besorgt. Dann genügen auch alle jene analytischen Fortsetzungen von w_1 der Gleichung

(5)
$$\omega(w, z_1, \ldots, z_r) = 0.$$

D e f i n i t i o n. Indem der Punkt $(z_1, \ldots, z_r)$ auf die Umgebung des Anfangs, etwa auf den Bereich

(6)
$$|z_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

beschränkt wird, liefern die Punkte $(w, z_1, \ldots, z_r, v)$, wo w und v die gleichzeitigen Fortsetzungen von w_1 und v_1 bedeuten, das *Gebilde* $\mathfrak{g}$. Dazu werden noch alle Grenzpunkte gezählt, deren Koordinaten der Bedingung (6) entsprechen.

Nähere Bestimmung der Definitionsbereiche. Der Bestimmtheit halber wollen wir die Gebilde $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$ noch etwas schärfer abgrenzen. Es mögen Bereiche Σ, S, wie folgt, erklärt werden.

$$\Sigma: \qquad |z_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, r;$$

$$S: \qquad |v| < g, \quad (z_1, \ldots, z_r) \text{ in } \Sigma, \qquad z_n = v.$$

Dabei sollen die Konstanten g, h zunächst so beschränkt werden, daß S, Σ resp. in den Bereichen liegen, worin die Koeffizienten A_k, E_j analytisch sind. Jetzt wird $\mathfrak{G}$ als das durch (1) definierte Gebilde erklärt, wo $(z_1, \ldots, z_n)$ beliebig in S liegt.

Endlich wird h noch so eingeschränkt, daß die Wurzeln von (3) und (5) dem absoluten Betrage nach kleiner als g ausfallen. Und nun wird $\mathfrak{g}$ der Bedingung entsprechen, daß $(z_1, \ldots, z_r)$ in Σ liegt.

Die verschiedenen irreduktiblen Faktoren $\omega(w, z)$ von $\overline{F}(w, z_1, \ldots, z_r)$ geben zu verschiedenen Werten von h Anlaß. Unter h verstehen wir nun schlechtweg den kleinsten dieser Werte (oder auch eine kleinere positive Zahl).

Wir können nunmehr den folgenden Satz aussprechen.

Satz. *Alle simultanen Lösungen der Gleichungen* (1) *und* (3) *liegen an einer endlichen Anzahl von Gebilden* $\mathfrak{g}$ *und machen diese Gebilde gerade aus.*

Die Funktion W. Des weiteren werde eine Funktion W vorgelegt, welche eindeutig und stetig am Gebilde $\mathfrak{G}$ ist und sich außerdem in den regulären Punkten von $\mathfrak{G}$ analytisch verhält. Nach § 12, 2. Satz, genügt W dann einer irreduktiblen pseudoalgebraischen Gleichung,

$$(7) \qquad \Psi(W, z_1, \ldots, z_n) = W^p + B_1 W^{p-1} + \cdots + B_p = 0,$$

deren Spitze im Anfange liegt.

Aus der Stetigkeit von W am Gebilde $\mathfrak{G}$ ergibt sich schon die Stetigkeit von W an einem Gebilde $\mathfrak{g}$. Es liegt aber kein Grund vor, zu glauben, daß W sich in den regulären Punkten von $\mathfrak{g}$ analytisch verhalten soll. Es stellt sich indessen heraus, daß dem in der Tat so ist.

Sei nämlich $(z) = (a)$ ein Punkt von Σ, der zu lauter gewöhnlichen Stellen von $\mathfrak{g}$ führt. Trägt man in (7) $z_n = v_1$ ein, so kommt:

(8) $$\Psi(W, z_1, \ldots, z_r, v_1) = \Psi_a(W, z_1, \ldots, z_r) = 0,$$

wo Ψ_a ein Pseudopolynom mit der Spitze (a) bedeutet. Bilden wir das Produkt der in (a) irreduktiblen Faktoren von Ψ_a, jeden nur einmal gerechnet, so verschwindet die Diskriminante desselben nicht identisch. Demgemäß verhält sich W in der Umgebung irgendeiner der genannten Stellen von $\mathfrak{g}$ analytisch, höchstens bis auf die Punkte einer $(2r-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Da W außerdem eindeutig und stetig in der bewußten Umgebung ist, so erweist sich W dort als ausnahmslos analytisch, vgl. Kap. 3, § 3. — In ähnlicher Weise wird gezeigt, daß W auch in etwaigen sonstigen regulären Punkten von $\mathfrak{g}$ analytisch ist.

Die Wurzeln von W. Untersuchen wir jetzt die Stellen von $\mathfrak{G}$, worin W einen konstanten Wert hat,

$$W = C.$$

Es genügt, $C = 0$ zu setzen. Mit Rücksicht auf (7) erkennt man, daß eine notwendige Bedingung für eine Wurzel von W auf $\mathfrak{G}$ in der Gleichung

(9) $$B_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

besteht.

Verschwindet W nicht identisch auf $\mathfrak{G}$, so liegen die Nullstellen von W auf einem oder mehreren Gebilden $\mathfrak{g}$, welche, wie folgt, erhalten werden. Sei $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ ein irreduktibler Faktor von $B_{\mathfrak{p}}(z_1, \ldots, z_n)$, und man betrachte alle Gebilde $\mathfrak{g}$, welche durch die Gleichung $\psi = 0$ nebst der Gleichung (1) definiert werden. Diese Gebilde mögen hinfort mit $\mathfrak{g}_0$ bezeichnet werden. Ihre Gesamtheit stellt die vollständige Lösung der Gleichungen (1) und (9) vor, wo $(z_1, \ldots, z_r)$ in einem geeigneten Bereiche Σ liegt.

Auf mindestens einem dieser Gebilde $\mathfrak{g}_0$ wird W identisch verschwinden. Sei nämlich $(z) = (a)$ ein Punkt des Bereiches Σ, der zu lauter gewöhnlichen Stellen $P_1, P_2, \ldots$ sämtlicher $\mathfrak{g}_0$ führt und wofür auch die irreduktiblen Faktoren der sämtlichen Funktionen Ψ_a linear ausfallen. In mindestens einer der Stellen P_k muß der zugehörige Wert von W verschwinden, da $B_{\mathfrak{p}}$ in jedem Punkte P_i gleich null wird, und da ferner jede Wurzel

von (7) einen Wert von W in einem der Punkte P_i vorstellt. Demnach muß W in der Umgebung mindestens einer der Stellen P_k identisch verschwinden, und darum verschwindet W auch identisch am bewußten Gebilde $\mathfrak{g}_0$.

Erschöpfung der Wurzeln von W. Mit den Punkten der Gebilde $\mathfrak{g}_0$, an denen W identisch verschwindet, werden sämtliche Wurzeln von W an $\mathfrak{G}$ erschöpft. In der Tat sei

$$Q: \qquad (c, a) = (c, a_1, \ldots, a_n)$$

eine beliebige Stelle von $\mathfrak{G}$, in welcher W verschwindet. Dann muß B_p wegen (7) im Punkte Q verschwinden, und darum liegt Q auf einem Gebilde $\mathfrak{g}_0$.

Wir betrachten nun das vorgelegte Pseudopolynom $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ in der Nähe von Q. Dasselbe kann in mehrere irreduktible Faktoren zerfallen, wovon aber einer, $\mathfrak{H}(w, z_1, \ldots, z_n)$, in der Spitze $(a_1, \ldots, a_n)$ die Wurzel $w = c$ haben und der Stelle Q von $\mathfrak{G}$ entsprechen wird. Auf diesem Gebilde wird dann W eindeutig und im Punkte Q gleich null sein. Demgemäß gestatten die voraufgehenden Entwicklungen eine unmittelbare Anwendung auf diesen Fall. Insbesondere wird es mindestens ein Gebilde $\bar{\mathfrak{g}}_0$ geben, woran W identisch verschwindet und welches den Punkt Q enthält. Sei $(a') = (a'_1, \ldots, a'_r)$ ein Punkt der Nachbarschaft von $(a) = (a_1, \ldots, a_r)$, dem nur gewöhnliche Punkte sowohl von $\bar{\mathfrak{g}}_0$ als auch von sämtlichen Gebilden $\mathfrak{g}_0$ entsprechen. In der Nähe von (a') fällt dann $\bar{\mathfrak{g}}_0$ mit einem der Gebilde $\mathfrak{g}_0$ zusammen, und darum liegt $\bar{\mathfrak{g}}_0$ ganz auf dem bewußten $\mathfrak{g}_0$. Hiermit ist denn gezeigt worden, daß die Wurzel Q: (c, a) von W doch auf einem der bewußten $\mathfrak{g}_0$ liegt, w. z. b. w.

Fassen wir das Ergebnis in einen Satz zusammen, so können wir sagen:

Satz. *Die Nullstellen der Funktion W machen eine endliche Anzahl von Gebilden $\mathfrak{g}$ aus, sofern W nicht gerade identisch verschwindet.*

Bei nicht-spezialisierter Wahl des Koordinatensystems besteht ein Gebilde $\mathfrak{g}$ aus den Punkten $(w, z_1, \ldots, z_n)$, wo $z_n = v$ durch eine Gleichung (3) *definiert wird und w eindeutig am Gebilde* (3) *ist.*

Beispiel. Sei

$$w^2 - z_1 z_2 = 0, \tag{1'}$$

und sei
$$W = w - z_2.$$
Dann geht (7) aus der Gleichung
$$(W + z_2)^2 - z_1 z_2 = 0$$
hervor, also wird

(7′) $$W^2 + 2 z_2 W + z_2^2 - z_1 z_2 = 0.$$

Demnach wird
$$B_p = z_2^2 - z_1 z_2 = (z_2 - z_1) z_2.$$

Die Gebilde $\mathfrak{g}_0$ entstehen aus den folgenden Zylindern $\psi(z_1, z_2) = 0$:
$$i) \quad z_2 - z_1 = 0; \qquad ii) \quad z_2 = 0.$$
In beiden Fällen wird $z_2 = v$ gesetzt.

ad *i*) Hier fällt die Gleichung (3), wie folgt, aus:

(3′) $$v - z_1 = 0.$$

Trägt man den Wert $v_1 = z_1$ in (1′) ein, so kommt:
$$w^2 - z_1 v_1 = w^2 - z_1^2 = (w - z_1)(w + z_1) = 0,$$
also
$$\omega_1(w, z_1) = w - z_1 = 0; \qquad \omega_2(w, z_1) = w + z_1 = 0.$$

Es gibt also hier zwei Gebilde $\mathfrak{g}_0$:
$$g_0^{(1)}: \begin{cases} v = z_1, \\ w = z_1; \end{cases} \qquad g_0^{(2)}: \begin{cases} v = z_1, \\ w = -z_1. \end{cases}$$
Am Gebilde $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ verschwindet W identisch. Am Gebilde $\mathfrak{g}_0^{(2)}$ ist W dagegen von null verschieden bis auf den Schnittpunkt dieses Gebildes mit $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ und dem weiteren Gebilde $\mathfrak{g}_0$ unter *ii*), nämlich $(w, z_1, z_2) = (0, 0, 0)$.

ad *ii*) Hier wird (3) zur Gleichung

(3″) $$v = 0.$$

Aus (1′) wird nun
$$w^2 - z_1 v_1 = w^2 = 0.$$
Es gibt nur ein Gebilde $\mathfrak{g}_0$,

$\mathfrak{g}_0$: $$v = 0, \qquad w = 0.$$

An demselben muß W notwendig identisch verschwinden, was auch bestätigt wird.

Aus diesem Beispiele geht ferner hervor, daß es in der Tat Gebilde $\mathfrak{g}_0$ geben kann, woran W nicht identisch verschwindet. In einem solchen Falle liefern diese Gebilde keine neuen Wurzeln von W — *eine* Wurzel hat W jedenfalls darauf, da alle Gebilde $\mathfrak{g}_0$ ja durch den Punkt $(w, z) = (0, 0)$ hindurchgehen —, sondern weisen nur da Wurzeln auf, wo sie mit jenen anderen Gebilden $\mathfrak{g}_0$ zum Schnitte kommen.

§ 15. Von den singulären Stellen eines pseudoalgebraischen Gebildes.

Wir sind jetzt in der Lage, näheres über die singulären Stellen eines ausgezeichneten irreduktiblen pseudoalgebraischen Gebildes $\mathfrak{G}$:

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0 \tag{1}$$

zu bestimmen. Diese finden sich unter den an $\mathfrak{G}$ gelegenen Nullstellen der Funktion $W = F_w(w, z_1, \ldots, z_n)$, und letztere füllen nach § 14 ein oder mehrere Gebilde $\mathfrak{g}$ aus. Aber nicht jede Stelle von $\mathfrak{G}$, an welcher F_w verschwindet, braucht eine singuläre Stelle der Funktion w zu sein. Es fragt sich nun, ob die singulären Stellen der Funktion w einen gewissen Komplex von Gebilden $\mathfrak{g}$ gerade ausmachen.

Die singulären Stellen von $\mathfrak{G}$ liegen aber auch an den Gebilden $\mathfrak{g}$, welche durch den Schnitt von (1) mit der Diskriminantenfläche $D(z_1, \ldots, z_n) = 0$, also mit dem Zylinder (5), § 11,

$$\Delta(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r) = \eta^\mu + \gamma_1(\xi)\eta^{\mu-1} + \cdots + \gamma_\mu(\xi) = 0, \tag{2}$$

$$z_n = \eta, \qquad z_k = \xi_k, \qquad k = 1, \ldots, r = n-1,$$

entstehen, und diese letzteren Gebilde wollen wir nun des näheren untersuchen.

Wir wollen annehmen, daß die Koeffizienten A_j sich im Bereiche

S: $\quad |\eta| < g, \qquad (\xi)$ in Σ;

Σ: $\quad |\xi_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, r,$

analytisch verhalten, sowie daß $|\eta'| < g$, wo (ξ) in Σ liegt und η' eine beliebige Wurzel von (2) ist.

Sei $(\xi) = (\alpha)$ ein Punkt von Σ, wofür Δ lauter getrennte Wurzeln hat, und sei $\eta = \beta$ eine dieser Wurzeln. Dann liegt β im Kreise

$$\mathfrak{K}: \qquad |\eta| < g.$$

Um β werde ein in $\mathfrak{K}$ befindlicher Kreis

$$K: \qquad |\eta - \beta| < \lambda, \qquad |\beta| + \lambda < g,$$

so gewählt, daß keine zweite Wurzel von $\Delta(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ in K (inkl. des Randes) vorhanden ist. Wird dann ϱ der Bedingung

$$0 < \varrho < \lambda$$

gemäß beliebig angenommen, so läßt sich l derart bestimmen, daß, wenn (ξ) in der Umgebung

$$\mathfrak{U}: \qquad |\xi_k - \alpha_k| < l, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

der Stelle (α) liegt, eine und nur eine Wurzel von Δ sich in K befindet und auf den Kreis

$$K': \qquad |\eta - \beta| < \varrho$$

beschränkt ist.

Die Funktion w im Bereiche $\{K - K', \mathfrak{U}\} = R$. Wir betrachten nun die verschiedenen Wurzeln von F im Bereiche

$$R = \{K - K', \mathfrak{U}\}: \qquad \varrho < |\eta - \beta| < \lambda, \qquad |\xi_k - \alpha_k| < l, \qquad k = 1, \ldots, r.$$

In jedem Punkte desselben sind diese sämtlich getrennt. Im Kleinen lassen sie sich also zu m analytischen Funktionen zusammenfassen. Setzen wir ein besonderes dieser Funktionselemente in R analytisch fort, so entsteht dadurch eine in R q-deutige Funktion, $1 \leqq q \leqq m$, deren Werte in R mit $w_1, \ldots, w_q$ bezeichnet werden mögen. Die elementaren symmetrischen Funktionen derselben,

$$w_1^k + \cdots + w_q^k, \qquad k = 1, \ldots, q,$$

sind eindeutig und analytisch in R, und mögen $\Phi_k(z_1, \ldots, z_n)$ heißen. Jede dieser Funktionen gestattet eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich

$$T = \{K, \mathfrak{U}\}: \qquad |\eta - \beta| < \lambda, \qquad |\xi_k - \alpha_k| < l, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

wie wir jetzt beweisen wollen.

Vor allem erkennt man, daß Φ_k eine Fortsetzung in jeden Punkt von T gestattet, der nicht auf der Mannigfaltigkeit $\Delta = 0$ liegt. Ein solcher Punkt ist $(\eta', \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $0 < |\eta' - \beta| < \lambda$. Wir nehmen nun ϱ' so an, daß $0 < \varrho' < |\eta' - \beta|$ ausfällt, und bestimmen den zugehörigen Wert, l', von l. Dann verhält sich die entsprechende Funktion $\Phi'_k(z_1, \ldots, z_n)$ analytisch im Bereiche

$$R': \qquad \varrho' < |\eta - \beta| < \lambda, \qquad |\xi_k - \alpha_k| < l', \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,r.}$$

Ein Teil dieses Bereiches, nämlich der Bereich[1])

$$\varrho < |\eta - \beta| < \lambda, \qquad |\xi_k - \alpha_k| < l', \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,r,}$$

liegt in R, und dort stimmt Φ'_k eben mit Φ_k überein.

In ähnlicher Weise wird der Beweis für jeden anderen Punkt $(\eta', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$ geführt, wobei η' in K, (α') in $\mathfrak{U}$ liegt und $\Delta(\eta', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r) \neq 0$ ist. Die Wurzel β' von $\Delta(\eta, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$, welche in K' liegt, umgeben wir mit einer kleinen Nachbarschaft τ, welche den Punkt η' ausschließt, und bestimmen dann eine Umgebung σ des Punktes (α') derart, daß eine Funktion Φ'_k im Bereiche $\{K - \tau, \sigma\}$ definiert werden kann, welche im Teilbereiche $\{K - K', \sigma\}$ mit Φ_k übereinstimmt und letztere Funktion in den Punkt $(\eta', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$ analytisch fortsetzt.

Es bleibt noch übrig, zu bemerken, daß das soeben dargelegte Verfahren eine in T' *eindeutige* Funktion liefert, wo T' aus den Punkten von T besteht, in denen $\Delta \neq 0$ ist. Ist nämlich (α') ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{U}$, so wird Φ_k in jedem Punkte $(\eta, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$, wofür η in K liegt und $\neq \beta'$ ist, durch die ursprüngliche Funktion Φ_k nebst der soeben benützten analytischen Fortsetzung derselben eindeutig bestimmt. — Daß Φ_k außerdem noch endlich bleibt, ist ja sofort evident.

Jetzt sind alle Bedingungen des ersten Satzes von Kap. 3, § 3 resp. § 4 erfüllt, und Φ_k erweist sich somit als analytisch in T. Demgemäß genügen diese q Bestimmungen von w einer irreduktiblen pseudoalgebraischen Gleichung

$$(3) \qquad w^q + B_1 w^{q-1} + \cdots + B_q = 0$$

mit der Spitze $(z_1, \ldots, z_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta)$. Die Koeffizienten B_j verhalten sich analytisch in T.

1) Zur Vereinfachung des Beweises dürfen wir voraussetzen, daß $\varrho' \leqq \varrho$, $l' \leqq l$ ist.

Wir sind nunmehr in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz. *Sei* $\mathfrak{g}$ *ein beliebiges der Gebilde*

$$F = 0, \qquad \Delta = 0.$$

Sieht man von den Stellen ab, in denen die Diskriminante von Δ *verschwindet, so hängen genau* q *Zweige von* w *in jedem Punkte von* $\mathfrak{g}$ *zusammen.*

Daß nämlich mindestens q Zweige in der Umgebung der Stelle $(w, z) = (\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta)$ von $\mathfrak{g}$, wo γ die Wurzel von (3) in der Spitze, zusammenhängen, wurde klar, sowie die obigen mehrdeutigen Funktionen im Bereiche R zu Zyklen zusammengefaßt waren. Es blieb aber noch übrig zu konstatieren, daß diese Zyklen nicht ineinander fortgesetzt werden können, ohne daß (z) aus dem Bereich T hinaustritt, und dies erhellt sofort aus der Relation (3).

Sodann wird ferner gezeigt, daß diese Zahl q auch in jedem Punkte einer gewissen Umgebung der Stelle $(\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta)$ von $\mathfrak{g}$ erhalten bleibt. Dazu verhilft uns keine pseudoalgebraische Gleichung, wie (3). Wir haben eben den ganzen ins Einzelne besprochenen Sachverhalt nötig, insbesondere den Umstand, daß jeder Punkt (α') von $\mathfrak{U}$ zu einer und nur einer Wurzel β' von Δ führt, wozu sich noch eine und nur eine Wurzel γ' von F gesellt [hiermit ist dann ein einziger Punkt $(\gamma', \alpha_1', \ldots, \alpha_r', \beta')$ von $\mathfrak{g}$ bestimmt] und daß genau q Wurzeln von F in diesem Punkte zusammenhängen.

Der Beweis des Satzes besteht nun eben darin, daß man zwei beliebige nicht-spezialisierte Punkte des bewußten Gebildes $\mathfrak{g}$ durch eine auf $\mathfrak{g}$ verlaufende durch keine der Ausnahmepunkte hindurchgehende reguläre Kurve L miteinander verbindet und dann nach wohl bekannten Methoden konstatiert, daß q längs L konstant sein muß.

Von der Unmöglichkeit singulärer Gebilde niederer Dimension. Für ein bestimmtes Gebilde $\mathfrak{g}$ kann $q = 1$ sein, und es liegt die Frage nahe, ob dies nicht auch für alle Gebilde $\mathfrak{g}$ zugleich eintreten könnte. Dann würde das Verzweigungsgebilde nur von der $(2r-2)$-ten (oder sogar noch von einer niederen) Dimension sein.

Dieser Fall ist aber leicht zu erledigen, da die Aushebung einer k-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit aus der Umgebung

eines Punktes eines Raumes von p Dimensionen einen linear einfach zusammenhängenden Bereich zurückläßt, sobald nur $k \leqq p-3$ ist. Würde ein Funktionselement w_1 also in jede Umgebung einer $(2r-2) = (2n-4)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ analytisch fortgesetzt werden können, so müßte zunächst eine eindeutige Funktion in der Umgebung von $\mathfrak{M}$ entstehen, und eine solche läßt stets nach dem zweiten Satze von Kap. 3, § 3 eine analytische Fortsetzung in die Punkte von $\mathfrak{M}$ zu.

§ 16. Von der Darstellung der Funktion W am singulären Gebilde.

Ist W eindeutig und analytisch an denjenigen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}$,

(1) $$F(w, z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

von § 10, (1), in denen $F_w(w, z_1, \ldots, z_n)$ nicht verschwindet, und bleibt W fernerhin endlich am Gebilde, so haben wir bereits gesehen, daß sich W an allen solchen Stellen in der Form darstellen läßt:

(2) $$W = \frac{G(w, z_1, \ldots, z_n)}{F_w(w, z_1, \ldots, z_n)},$$

wo G ein Pseudopolynom bedeutet, dessen Spitze mit derjenigen von F zusammenfällt. Wir haben fernerhin gesehen, daß W sich an den übrigen Stellen von $\mathfrak{G}$ so definieren läßt, daß W überall auf $\mathfrak{G}$ stetig wird; § 12, 1. Satz. Sei $\mathfrak{g}$ eins der Gebilde, in denen $F_w(w, z_1, \ldots, z_n)$ auf $\mathfrak{G}$ verschwindet. Nach einer eventuellen linearen Transformation von $z_1, \ldots, z_n$ wird $\mathfrak{g}$ durch eine Gleichung definiert:

(3) $$\Psi(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r) = 0,$$

wo Ψ einen irreduktiblen Faktor von $\Delta(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)$, § 15, (2), also ein ausgezeichnetes irreduktibles Pseudopolynom mit der Spitze im Anfange bedeutet, und w eindeutig darauf bzw. Wurzel einer ähnlichen Gleichung (nämlich der Gleichung (5), § 14)

(4) $$\Omega(w, \xi_1, \ldots, \xi_r) = 0$$

ist, und wo die Punkte von $\mathfrak{g}$ die Koordinaten $(w, \xi_1, \ldots, \xi_r, \eta)$ haben. Nach den Entwicklungen von § 14 wird nun W (und also auch insbesondere w) nicht nur stetig, sondern auch analytisch auf diesem Gebilde sein.

Darnach läßt sich W an allen Stellen von $\mathfrak{g}$, in denen $\Psi_\eta(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r) \neq 0$ ist, falls w eindeutig auf (3) ist, in der Form darstellen:

$$W = \frac{\Gamma(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)}{\Psi_\eta(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r)}, \tag{5}$$

wo Γ ein Pseudopolynom bedeutet, dessen Spitze im Anfange liegt.

Ist nun $n > 2$, so können wir den Schluß an den bisher ausgeschlossenen singulären Stellen wiederholen und so fortfahren, bis wir W in jedem Punkte des Gebildes $\mathfrak{G}$ höchstens mit Ausnahme des Anfangs durch Formeln vom Typus (2), (5) usw. zur Darstellung gebracht haben; Weierstraß, vgl. § 17.

§ 17. Über simultane Gleichungssysteme. Der zweite Weierstraßsche Satz.

Das Gebilde $\mathfrak{g}$ *im allgemeinen Falle.* Wir knüpfen an den Begriff der früheren Gebilde $\mathfrak{g}$, § 14, an, indem wir von einem ausgezeichneten irreduktiblen pseudoalgebraischen Gebilde

$$H(w, u_1, \ldots, u_\varrho) = w^\mu + E_1 w^{\mu-1} + \cdots + E_\mu = 0 \tag{1}$$

und einem zu demselben gehörigen Funktionensysteme[1]) $w_1, \ldots, w_\sigma$ ausgehen. Dann soll die Punktmenge $\{(w_1, \ldots, w_\sigma, u_1, \ldots, u_\varrho)\}$ ein *Gebilde* $\mathfrak{g}$ ausmachen. Übt man nun eine beliebige nichtsinguläre lineare Transformation

$$z_i = c_{i1} w_1 + \cdots + c_{i\sigma} w_\sigma + c_{i,\sigma+1} u_1 + \cdots + c_{in} u_\varrho + a_i$$

aus, wobei $n = \sigma + \varrho$, $i = 1, \ldots, n$, so möge das transformierte Gebilde auch ein *Gebilde* $\mathfrak{g}$ heißen.

Ausführlicher gesagt heißt $\mathfrak{g}$ ein *Gebilde* ϱ*-ter Stufe im Raume der* n *Veränderlichen*[2]) (z) oder (w, u).

Nach den voraufgehenden Entwicklungen bilden die singulären Stellen von $\mathfrak{g}$ (falls $\mu > 1$) ein oder mehrere Gebilde $\mathfrak{g}'$ von

1) Damit ist ja nach § 13 gemeint, daß jede Funktion w_λ am Gebilde (1) eindeutig und stetig und in den regulären Punkten desselben analytisch, und fernerhin die Funktion $a_1 w_1 + \cdots + a_\sigma w_\sigma$ bei nicht-spezialisierter Wahl der a_λ mit diesem Gebilde gleichverzweigt sein soll.

2) Die gleichzeitigen analytischen Fortsetzungen der Funktionen $w_1, \ldots, w_\sigma$ nebst gewissen später zu besprechenden Grenzpunkten bilden nach Weierstraß ein *monogenes analytisches Gebilde* ϱ*-ter Stufe im Raume der* n *Veränderlichen.*

der $(\varrho - 1)$-ten Stufe. Ähnliches gilt von den singulären Stellen letzterer Gebilde, falls solche Stellen vorhanden sind, usw.

Der zweite Weierstraßsche Satz.[1]) *Vorgelegt sei ein System simultaner Gleichungen:*

$$\text{(A)} \qquad G_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad G_l(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wobei $G_k(z_1, \ldots, z_n)$, $k = 1, \ldots, l$, *eine im Punkte* (a) *analytische, daselbst verschwindende Funktion bedeutet, doch darf keine dieser Funktionen identisch verschwinden. Ist* $l \geqq n$, *so werden die in der Nähe von* (a) *belegenen gemeinsamen Nullstellen im allgemeinen bloß aus dem einen Punkte* $(z) = (a)$ *bestehen.*

Wird dem vorgelegten System noch durch einen zweiten Punkt der genannten Nachbarschaft genügt, — und dieser Fall tritt stets ein, wenn $l < n$ *ist, — so bestehen die simultanen Lösungen des Systems* (A) *aus den Punkten eines oder mehrerer Gebilde* $\mathfrak{g}$. *Die Stufe* ϱ *eines* $\mathfrak{g}$ *ist an die Relation geknüpft:* $n - l \leqq \varrho \leqq n - 1$; *doch brauchen die Gebilde* $\mathfrak{g}$ *nicht alle von gleicher Stufe zu sein.*

Ist $l \geqq n$, so wird im allgemeinen eine der aus n der Funktionen G_k gebildeten Jacobischen Determinanten, etwa

$$\frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$$

im Punkte $(z) = (a)$ nicht verschwinden. Dann lassen sich die n Gleichungen

$$Z_i = G_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad {\scriptstyle i = 1, \ldots, n,}$$

eindeutig umkehren, woraus sich denn ergibt, daß dem Punkte $(Z) = (0)$ der einzige Punkt $(z) = (a)$ entspricht.

Tritt dieser Fall nicht ein, so wird der Beweis vermöge der Methode der vollständigen Induktion geführt. Sei n beliebig, aber fest. Für $l = 1$ reduziert sich der Satz auf den ersten Weierstraßschen Satz, § 1. Wir nehmen nun an, daß der Satz für $l = 1, 2, \ldots, l$ richtig ist, und beweisen dann, daß er auch für $l + 1$ gilt.

Ziehen wir also ein beliebiges der Gebilde $\mathfrak{g}$ in Betracht, welches den ersten l der vorgelegten Gleichungen (A) entspricht. Dieses werde vermöge der Gleichung (1) und des dazu gehörigen

1) Weierstraß, *Werke*, Bd. 3, S. 79. Mit Rücksicht auf den aus dem Vorbereitungssatze hervorgehenden ersten Existenzsatz bezgl. mehrdeutiger impliziter Funktionen scheint es wohl angebracht zu sein, die vorliegende Verallgemeinerung desselben als den *zweiten Weierstraßschen Satz* zu bezeichnen.

Funktionensystems $w_1, \ldots, w_\sigma$ definiert. Die $(l+1)$-te der vorgelegten Gleichungen (A), auf die (w, u)-Variabelen bezogen, möge lauten:

$$\Psi(w_1, \ldots, w_\sigma, u_1, \ldots, u_\varrho) = 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$W = \Psi(w_1, \ldots, w_\sigma, u_1, \ldots, u_\varrho)$$

am Gebilde (1). Diese ist eindeutig und stetig, und in allen regulären Punkten auch analytisch, und sie verschwindet außerdem im Anfange. Von ihren auf diesem Gebilde belegenen Nullstellen gilt mithin das Resultat von § 14. Es kann insbesondere vorkommen, daß W dort identisch verschwindet. Dann stellt das Gebilde $\mathfrak{g}$ lauter simultane Lösungen der sämtlichen $l+1$ vorgelegten Gleichungen vor. Sonst verteilen sich die Nullstellen von W am Gebilde (1) auf ein oder mehrere Gebilde $\mathfrak{g}'$ je von der $(\varrho-1)$-ten Stufe.

Wir heben noch besonders hervor, daß beim Übergange von l zu $l+1$ ein Gebilde $\mathfrak{g}$ ϱ-ter Stufe entweder erhalten blieb oder aber durch ein oder mehrere Gebilde $\mathfrak{g}'$ je von der $(\varrho-1)$-ten Stufe ersetzt wurde, es entstand also niemals aus $\mathfrak{g}$ beim genannten Übergange ein Gebilde $\mathfrak{g}''$ von niederer als der $(\varrho-1)$-ten Stufe.

Hiermit ist der Beweis des Satzes geliefert.

Beispiel 1. Sei $n = 3$, $l = 2$,

$$z - x^2 = 0, \qquad z - y^2 = 0.$$

Dann sind zwei $\mathfrak{g}$ vorhanden, und zwar ist jedes von der 1-ten Stufe:

$\mathfrak{g}_1$: $\qquad y = x, \qquad z = x^2;$

$\mathfrak{g}_1'$: $\qquad y = -x, \qquad z = x^2.$

Beispiel 2. Sei $n = 4$, $l = 3$,

$$z - x^2 = 0. \qquad z - y^2 = 0, \qquad (z - x^2) + (y - x)t = 0.$$

Dann sind wiederum zwei $\mathfrak{g}$ vorhanden, doch sind diese nicht mehr von gleicher Stufe:

$\mathfrak{g}_2$: $\qquad y = x, \qquad z = x^2, \qquad x = x, \qquad t = t;$

$\mathfrak{g}_1$: $\qquad y = -x, \qquad z = x^2, \qquad x = x, \qquad t = 0.$

Beispiel 3. Sei $n = 5$, $l = 4$,

$$z - x^3 = 0, \qquad z - y^3 = 0, \qquad (z - x^3) + (y - x)t = 0,$$
$$(z - x^3) + (y - x)t + (y - x)(y - \omega x)(u - x) = 0.$$

Hier sind drei $\mathfrak{g}$ vorhanden, und zwar stellen sie wiederum, wie bisher, jede mögliche Stufe vor:

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{g}_3: & y = x, & z = x^3, & x = x, & t = t, & u = u; \\ \mathfrak{g}_2: & y = \omega x, & z = x^3, & x = x, & t = 0, & u = u; \\ \mathfrak{g}_1: & y = \omega^2 x, & z = x^3, & x = x, & t = 0, & u = x. \end{array}$$

Beispiel 4. Sei $n = 5$, $l = 4$,

$$z - x^3 = 0, \qquad z - y^3 = 0, \qquad (z - x^3) + (y^3 - x^3)t = 0,$$
$$(z - x^3)u + (y^3 - x^3)t = 0.$$

Hier sind drei $\mathfrak{g}$ vorhanden, welche alle von gleicher Stufe sind:

$$\mathfrak{g}_3^{(k)}: \quad y = \omega^k x, \quad z = x^3, \quad x = x, \quad t = t, \quad u = u; \qquad {\scriptstyle k = 0, 1, 2.}$$

Darstellung der gemeinsamen Lösungen. Weierstraß hat auch zugleich angegeben, wie die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen (A) zur Darstellung gebracht werden können. Sein Resultat ergibt sich sofort aus dem Satze von § 16 und lautet, wie folgt. Da es sich um eine Reihe verschiedener Stufen handelt, empfiehlt es sich, die n Variabelen mit $w_1, \ldots, w_n$ zu bezeichnen.

Die in der Nähe von (a) belegenen gemeinsamen Nullstellen der Gleichungen (A) *lassen sich, höchstens mit Ausnahme der einen Stelle* $(z) = (a)$, *durch eine endliche Anzahl von Formeln folgender Art ausdrücken:*

$$H(w_{m+1}, w_1, \ldots, w_m) = 0,$$
$$w_{m+j} = \frac{G_j(w_{m+1}, w_1, \ldots, w_m)}{H'(w_{m+1}, w_1, \ldots, w_m)}, \qquad {\scriptstyle j = 2, \ldots, n-m,}$$
$$z_i = c_{i1}w_1 + \cdots + c_{in}w_n + a_i, \qquad {\scriptstyle i = 1, \ldots, n,}$$
$$\sum \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn} \neq 0.$$

Dabei bedeutet H ein irreduktibles ausgezeichnetes Pseudopolynom, dessen Spitze im Anfange liegt, und ferner ist H' die Ableitung von H nach dem ersten Argument; endlich ist G_j ein Pseudopolynom, dessen Spitze ebenfalls im Anfange liegt.

Die genannte Ausnahme tritt nur ein, wenn ein Gebilde $H=0$ vorhanden ist, wofür $m=1$ ist und dessen Grad >1 ist, z. B.

$$H(w_2, w_1) \equiv w_2^3 - w_1^2.$$

Die Punkte eines solchen Gebildes lassen sich zwar in der Form darstellen:

$$w_i = \varphi_i(t), \qquad i=1,\ldots,n,$$

wobei $\varphi_i(t)$ sich im Punkte $t=0$ analytisch verhält und wo außerdem zwei verschiedene Werte von t niemals zur gleichen Stelle des Gebildes $H=0$ führen; aber diese Darstellung subsumiert sich nicht stets unter die sonstige Form.

Ist $(c'_{11}, \ldots, c'_{nn})$ eine mögliche Wahl der c_{ij}, so liefert jeder in der Nähe von (c') belegene Punkt (c) ebenfalls eine mögliche Wahl.

§ 18. Ein weiterer Satz betreffend implizite Funktionen.

Im Anschluß an den zweiten Weierstraßschen Satz, § 17, kann man noch einen dritten Satz beweisen, welcher namentlich bei der Umkehrung einer Transformation in der Umgebung einer singulären Stelle gute Dienste leistet.[1]

Theorem. *Vorgelegt sei ein Gleichungssystem*

$$(1) \qquad F_i(u_1, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q) = 0, \qquad i=1,\ldots,p,$$

wobei F_i sich im Anfang analytisch verhält und dort verschwindet. Ferner mögen die Gleichungen

$$(2) \qquad F_i(u_1, \ldots, u_p; 0, \ldots, 0) = 0, \qquad i=1,\ldots,p,$$

1) Dieser Satz hat vielleicht schon Poincaré vorgeschwebt; vgl. seine *Thèse*, Paris 1879, Lemma IV, S. 14. Was er mit den Worten: „. . . si les équations $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_p = 0$ restent distinctes quand on annule tous les x . . .“ meinte, kann man nur raten. Der Satz des Textes gibt eine mögliche Auslegung derselben.

Nach einem zweiten, ebenfalls mit ungenügenden Hypothesen ausgesprochenen Satze von Poincaré lassen sich die Gleichungen (1) durch ein neues System von gleichem Typus ersetzen, wobei die linken Seiten außerdem in den Variabelen $u_1, \ldots, u_p$ Polynome sind; Poincaré, *Mécanique céleste*, Bd. 1, S. 72; Osgood, *Madison Colloquium*, S. 196. Unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erkennt man auf Grund der Entwicklungen des Textes, daß es allerdings ein solches Gleichungssystem gibt, welches durch alle Lösungen von (1) befriedigt wird, dasselbe kann aber denkbarerweise noch andere Lösungen zulassen. Vgl. auch Clements, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 14 (1913), S. 325.

keine andere in der Nähe des Anfangs gelegene Lösung als nur $(u_1, \ldots, u_p) = (0, \ldots, 0)$ *zulassen. Dann liegen die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen* (1) *auf einem oder mehreren Gebilden* $\mathfrak{g}$ *je von der* q*-ten Stufe.*

Sieht man insofern von einer spezialisierten Lage des Koordinatensystems ab, daß man eine beliebige lineare Transformation

$$(3) \qquad u_i' = c_{i1}u_1 + \cdots + c_{ip}u_p, \qquad i = 1, \ldots, p,$$
$$\sum \pm c_{11} \ldots c_{pp} \neq 0,$$

zuläßt, so kann man jedes Gebilde $\mathfrak{g}$ *so darstellen, daß* u_p *Wurzel einer irreduktiblen ausgezeichneten pseudoalgebraischen Gleichung:*

$$(4) \qquad H(u_p, x_1, \ldots, x_q) = u_p^m + A_1 u_p^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

wird, während $u_1, \ldots, u_{p-1}$ *eindeutig und stetig am Gebilde* (4) *sind und sich in den regulären Punkten von* (4) *analytisch verhalten. Mithin läßt* u_i *im allgemeinen die Darstellung zu:*

$$(5) \qquad u_i = \frac{G_i(u_p, x_1, \ldots, x_q)}{H'(u_p, x_1, \ldots, x_q)}, \qquad H' = \frac{\partial H}{\partial u_p}, \qquad i = 1, \ldots, p-1,$$

wobei $G_i(u_p, x_1, \ldots, x_q)$ *sich im Anfang,* $(0, 0, \ldots, 0)$, *analytisch verhält und in den gemeinsamen Nullstellen von* H *und* H' *verschwindet.*

Diejenigen Lösungen der Gleichungen (1), *welche der Darstellung* (5) *entgehen, entsprechen den gemeinsamen Nullstellen von* H *und* H' *und ordnen sich mithin in ersichtlicher Weise in Klassen ein.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Methode, wonach der zweite Weierstraßsche Satz, § 17, bewiesen wurde. Vor allem ist klar, daß keine der Funktionen

$$(6) \qquad F_i(u_1, \ldots, u_p; 0, \ldots, 0)$$

identisch verschwindet, da sonst die übrigen F_i nach dem soeben genannten Satze eine von (0) verschiedene Nullstelle in der Nähe des Anfangs haben würden. Darnach kann man die erste Gleichung (1) durch ein ausgezeichnetes Pseudopolynom in u_1:

$$(7) \qquad H(u_1, u_2, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q) = 0,$$

ersetzen, und es genügt, vorauszusetzen, daß H irreduktibel sei.

Betrachtet man jetzt die Funktion

$$W = F_2(u_1, u_2, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q)$$

am Gebilde (7), so hat man eben den in § 14 behandelten Fall vor sich. Insbesondere wird die Funktion

$$\prod_k F_2(u_1^{(k)}, u_2, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q) = \psi(u_2, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q)$$

so beschaffen sein, daß

$$(8) \qquad \psi(u_2, \ldots, u_p; 0, \ldots, 0)$$

nicht identisch verschwindet, da sonst die gemeinsamen Nullstellen der p Funktionen (2) sich nicht auf den Anfang, $(u) = (0)$, beschränken würden.

Daraus ergibt sich, daß die Nullstellen von $\psi(u, x)$ nach eventueller Ausübung einer geeigneten Transformation (3) die Wurzeln einer oder mehrerer ausgezeichneten irreduktiblen Pseudopolynome in u_2 sind, deren Spitzen alle im Anfange liegen.

Wiederholt hat man nun den früheren Schluß, indem man die Funktion $F_3(u_1, u_2, \ldots, u_p; x_1, \ldots, x_q)$ an jedem dieser letzteren Gebilde betrachtet, so liegt die Sache jedesmal genau so, wie im soeben ausführlich besprochenen Falle, und damit gelangt man schließlich zur Gleichung (4) und zu den $p-1$ weiteren darauf eindeutigen Funktionen $u_1, \ldots, u_{p-1}$. Hiermit ist denn der Beweis geliefert.

§ 19. Über die Umkehrung eines Funktionensystems.

Wird eine Punkttransformation durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

definiert, wobei f_i sich im Punkte $(b_1, \ldots, b_n)$ analytisch verhält und dort den Wert a_i annimmt, und wo außerdem die Jacobische Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$$

dort nicht verschwindet, so lassen sich die Gleichungen (1) nach den u auflösen:

$$(2) \qquad u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei φ_i sich im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch verhält und dort den Wert b_i annimmt; vgl. Kap. 1, § 7.

Im übrigen hat auch die Jacobische Determinante

$$J' = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ einen von Null verschiedenen Wert, und zwar ist allgemein[1])

(3) $$JJ' = 1.$$

Im gegenwärtigen Paragraphen wollen wir zwei Fälle behandeln, wobei J im Punkte $(b_1, \ldots, b_n)$ verschwindet; vgl. den 2. und den 3. Satz. Wegen des identischen Verschwindens der Jacobischen Determinante vergleiche man § 23. Vorab möge aber noch folgendes bemerkt werden.

1. Satz.[2]) *Sei* $f_i(u_1, \ldots, u_n)$, $i=1,\ldots,n$, *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_n)$ *analytisch, und sei*

$$f_i(b_1, \ldots, b_n) = a_i.$$

Verschwindet dann die Jacobische Determinante

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$$

im Punkte $(b_1, \ldots, b_n)$, *so kann das Gleichungssystem*

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i=1, \ldots, n,$$

niemals eine eindeutige Umkehrung zulassen,

$$u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i=1, \ldots, n,$$

wobei $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ *sich im Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$ *analytisch verhält und dort den Wert* b_i *annimmt.*

Wäre der Satz falsch und bezeichnet man mit J' die Jacobische Determinante der φ_i für einen Fall, in welchem die genannte eindeutige Umkehrung doch statt hat, so bestände hier die Relation (3):

$$JJ' = 1.$$

Da aber im Punkte $(u) = (b)$ nach Voraussetzung $J = 0$ ist, während andererseits J' sich im Punkte $(x) = (a)$ analytisch verhält, so ist man hiermit zu einem Widerspruch geführt worden.

1) Jacobi, *Journ. für Math.*, 22 (1841) S. 319.
2) Clements, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 18 (1912), S. 452.

Der analoge Satz betreffend reelle stetige Funktionen reeller Variabelen hat nicht statt, wie das Beispiel zeigt:

$$x = u^3, \qquad y = v.$$

Wir wenden uns jetzt zu einem zweiten Satze, dessen Beweis sich sofort aus dem Theorem von § 18 ergibt.

2. Satz. *Sei* $f_i(u_1, \ldots, u_n)$, $i=1,\ldots,n$, *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_n)$ *analytisch und sei*

$$f_i(b_1, \ldots, b_n) = a_i.$$

Läßt dann das Gleichungssystem

$$\text{(A)} \qquad x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i=1,\ldots,n,$$

wenn $x_i = a_i$ *gesetzt wird:*

$$a_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i=1,\ldots,n,$$

nur die eine simultane Lösung

$$u_i = b_i, \qquad i=1,\ldots,n,$$

zu, so läßt sich die Umkehrung des Systems (A) *nach eventueller Ausübung einer linearen Transformation der* $u_1, \ldots, u_n$, *wie folgt, darstellen.*

Die eine Koordinate u_n *genügt einer irreduktiblen pseudoalgebraischen Gleichung mit der Spitze im Punkte* $(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\text{(B)} \qquad H(u_n, x_1, \ldots, x_n) = u_n^N + A_1 u_n^{N-1} + \cdots + A_N = 0.$$

Die übrigen Koordinaten $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *sind eindeutig und stetig am Gebilde* (B), *und verhalten sich analytisch in den regulären Punkten desselben. Sie lassen sich mithin an den gewöhnlichen Stellen (sowie möglicherweise noch an gewissen sonstigen regulären Stellen) in der Form darstellen:*

$$u_i = \frac{G_i(u_n, x_1, \ldots, x_n)}{H'(u_n, x_1, \ldots, x_n)}, \qquad H' = \frac{\partial H}{\partial u_n}, \qquad i=1,\ldots,n-1,$$

wobei G_i *ein Pseudopolynom mit gleicher Spitze ist und in solchen Punkten von* (B) *verschwindet, in denen zugleich auch* $H' = 0$ *ist.*

Der Satz würde sich dem Satze von § 18 direkt subsumieren, indem man

$$F_i(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_q) = f_i(u_1, \ldots, u_n) - x_i$$

setzt, wenn die eine Behauptung nur nicht wäre, daß es bloß ein

einziges Gebilde (B) gibt. Um diesen Punkt zu erledigen, nehmen wir an, es gäbe noch ein zweites irreduktibles Gebilde, wie jener Satz es verlangt:

$$u_n^{\nu} + \alpha_1 u_n^{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu = 0. \tag{4}$$

Sei $(x) = (a')$ ein Punkt, worin die Diskriminanten von (B) und (4) nicht verschwinden, und wofür auch die Resultante von (B) und (4) von 0 verschieden ist. Sei $(u_1', \ldots, u_n')$ ein Wertesystem $(u_1, \ldots, u_n)$, welches dem Punkt (a') vermöge (B) entspricht, und ebenso $(u_1'', \ldots, u_n'')$ ein durch (4) definiertes Wertesystem. Dann gestatten die Gleichungen (A) eine ein-eindeutige analytische Lösung sowohl in der Nähe des ersten als auch in der Nähe des zweiten dieser Punkte.

Nach dem 1. Satze verschwindet J in keinem dieser Punkte. Ferner kann man die Punkte durch eine Kurve verbinden, welche keinen Punkt mit dem Gebilde $J = 0$ gemein hat. Dieser Kurve entspricht aber auf dem Gebilde (B) in ein-eindeutiger Weise eine Kurve, welche vom Punkte $(x) = (a')$ in einem bestimmten Blatte ausgeht und nach dem Punkte $(x) = (a')$ in demselben bzw. in einem anderen Blatte wieder zurückkehrt, ohne dabei andere als nur reguläre Punkte des Gebildes zu treffen.

Hiermit sind wir aber zu einem Widerspruch geführt. Denn der Wert u_n'' ist eine Wurzel von (4), und im Punkte $(x) = (a')$ sind ja die Wurzeln von (4) verschieden von den Wurzeln von (B). Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

3. Satz. *Sei* $f_i(u_1, \ldots, u_n)$, $i=1, \ldots, n$, *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_n)$ *analytisch, und sei*

$$f_i(b_1, \ldots, b_n) = a_i.$$

Durch das Gleichungssystem

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{A}$$

wird eine bestimmte Umgebung T *der Stelle* $(u) = (b)$ *auf einen (ein- oder mehrblättrigen) Bereich* S *des* (x)*-Raumes abgebildet. Sei* $(x^{(k)})$ *eine in* S *enthaltene Punktmenge mit der einzigen Häufungsstelle* (a), *und sei* $(u^{(k)})$ *ihre Bildmenge in* T. *Damit letztere Menge stets die einzige Häufungsstelle* $(u) = (b)$ *habe, ist notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem*

$$f_i(u_1, \ldots, u_n) = a_i, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{4}$$

nur die eine in T *gelegene Lösung* $(u) = (b)$ *zulasse.*

Daß die Bedingung ausreicht, ergibt sich sofort aus dem zweiten Satze.

Die Bedingung ist aber auch notwendig. Würden nämlich die Gleichungen (4) in jeder Umgebung der Stelle $(u) = (b)$ eine von (b) verschiedene Lösung zulassen, so müßte es nach dem Weierstraßschen Satze, § 17, ein ganzes Gebilde $\mathfrak{g}$ von Stellen (u) geben, welches an (b) hinanreicht und Lösungen von (4) liefert. Sei $(c) \neq (b)$ eine Stelle von $\mathfrak{g}$, welche in T liegt, und sei $(u^{(k)})$ eine in T gelegene Punktmenge, welche (c) zur einzigen Häufungsstelle hat und mit keinem Gebilde $\mathfrak{g}$ einen gemeinsamen Punkt aufweist. Dann häufen sich die Bildpunkte $(x^{(k)})$ an der Stelle $(x) = (a)$, was nun gegen die Voraussetzung verstößt.

Wegen einer Reihe von Sätzen bezüglich der Auflösung des Gleichungssystems (1), § 18, bzw. der Umkehrung des vorstehenden Gleichungssystems (1) im Falle die Jacobische Determinante verschwindet, ohne identisch zu verschwinden, vergleiche man Arbeiten von Bliss, Clements, Dederick, MacMillan und Urner.[1])

§ 20. **Fortsetzung. Eine gewöhnliche Nullstelle der Jacobischen Determinante.**

Sei

(1) $$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wo f_i sich im Punkte $(u) = (b)$ analytisch verhält und dort den Wert a_i annimmt, und wo außerdem die Jacobische Determinante

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$$

dort verschwindet, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Setzt man

$$J = J_1^{\lambda_1} \ldots J_\mu^{\lambda_\mu},$$

wo $J_i(u_1, \ldots, u_n)$ im Punkte (b) irreduktibel ist, so soll die durch (1) definierte Abbildung in der Nähe einer gewöhnlichen Nullstelle (u^0) eines J_k, in welcher kein anderes J_l verschwindet, des näheren untersucht werden.

Unter einer *gewöhnlichen* Nullstelle von $\mathfrak{J} = J_k$ verstehen wir eine solche, in welcher mindestens eine der Ableitungen erster

1) Die genauen Zitate finden sich im *Madison Colloquium*, S. 196—198.

Ordnung nicht verschwindet. Wir üben jetzt die Transformation aus:

(2) $$\begin{cases} u_1' = \mathfrak{F}(u_1, \ldots, u_n), \\ u_k' = \sum_i c_{ki}(u_i - u_i^0), \end{cases} \qquad k = 2, \ldots, n,$$

wobei die c_{ki} nur so gewählt werden, daß

$$\left.\frac{\partial(u_1', \ldots, u_n')}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|_{(u_0)} \neq 0.$$

Wegen der bekannten Relationen

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1', \ldots, u_n')} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(u_1', \ldots, u_n')},$$

$$\frac{\partial(u_1', \ldots, u_n')}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(u_1', \ldots, u_n')} = 1,$$

hat die Jacobische Determinante J' der transformierten Funktionen

(3) $$x_i = F_i(u_1', \ldots, u_n'), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$J' = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1', \ldots, u_n')},$$

den Wert

$$J' = u_1'^{\lambda} \Omega(u_1', \ldots, u_n'),$$

wo $\lambda = \lambda_k$ gesetzt ist und Ω sich im Anfange analytisch verhält und dort nicht verschwindet,

$$\Omega(0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Wir fragen jetzt nach dem Abbild im (x)-Raume von der $(2n-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit

(4) $$J' = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad u_1' = 0.$$

Dasselbe wird durch das Gleichungssystem dargestellt:

(5) $$x_i = F_i(0, u_2', \ldots, u_n'), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Hier sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden, welche sich auf den Rang der Matrix

(6) $$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2'} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_n'} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial u_2'} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial u_n'} \end{matrix} \right\|$$

beziehen, wenn darin $u_1' = 0$ gesetzt wird.

Fall I. Es gibt mindestens eine $(n-1)$-reihige Determinante aus der Matrix, welche nicht identisch verschwindet, wenn $u_1' = 0$ gesetzt wird.

Fall II. Jede $(n-1)$-reihige Determinante aus der Matrix verschwindet identisch, wenn $u_1' = 0$ gesetzt wird.[1])

Wir wenden uns zuerst der Behandlung von Fall I zu. Hier ist es immer noch denkbar, daß sämtliche $(n-1)$-reihige Determinanten aus der Matrix im Anfange $(u') = (0)$ verschwinden. Bei nicht-spezialisierter Wahl von (u^0) trifft dies indessen nicht zu, wie wir nachträglich noch beweisen werden.

Setzen wir also voraus, daß etwa

$$j = \frac{\partial(F_2, \ldots, F_n)}{\partial(u_2', \ldots, u_n')}$$

im Anfange nicht verschwinde, da jeder andere Fall durch Vertauschung der $F_1, \ldots, F_n$ auf diesen zurückgeführt werden kann. Alsdann lassen sich die letzten $n-1$ Gleichungen (5) nach den $u_2', \ldots, u_n'$ eindeutig und analytisch auflösen. Trägt man diese Werte in der ersten Gleichung (5) ein, und setzt man dabei

$$F_1(0, u_2', \ldots, u_n') = H(x_2, \ldots, x_n),$$

so wird das Gebilde (5) in der Form dargestellt:

$$x_1 = H(x_2, \ldots, x_n), \tag{7}$$

wo H sich im Punkte $(x_2^0, \ldots, x_n^0)$ analytisch verhält und dort den Wert x_1^0 annimmt.

Wir führen jetzt eine nicht-singuläre Transformation unter den x_i aus, indem wir

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - H(x_2, \ldots, x_n), \\ x_k' &= x_k - x_k^0, \qquad k = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

setzen. Die Jacobische Determinante dieser Transformation hat den Wert 1,

$$\frac{\partial(x_1', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

---

1) Für Fall I ist das Beispiel

$$x = u^2, \qquad y = v$$

bezeichnend. Zur Beleuchtung von Fall II diene das Beispiel

$$x = uv, \qquad y = u.$$

Die (x') hängen von den (u'), wie folgt, ab:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= F_1(u_1', u_2', \ldots, u_n') - F_1(0, u_2', \ldots, u_n') \\
(9) \qquad &= u_1'^{\,m}\, \omega(u_1', \ldots, u_n') \\
x_k' &= F_k(u_1', \ldots, u_n') - x_k^0, \qquad k = 2, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

wobei $\omega(u_1', \ldots, u_n')$ sich im Anfange analytisch verhält und nicht identisch verschwindet, sonst müßte ja J' identisch verschwinden. Im übrigen soll ω dort nicht durch u_1' teilbar sein. Wir wollen zeigen, daß

$$\omega(0, \ldots, 0) \neq 0.$$

In der Tat ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1'}{\partial u_1'} &= u_1'^{\,m-1}\left[m\omega + u_1' \frac{\partial \omega}{\partial u_1'}\right], \\
\frac{\partial x_1'}{\partial u_k'} &= u_1'^{\,m} \frac{\partial \omega}{\partial u_k'}, \qquad k = 2, \ldots, n; \\
\frac{\partial x_l'}{\partial u_i'} &= \frac{\partial F_l}{\partial u_i'}, \qquad \begin{cases} l = 2, \ldots, n; \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$J'' = \frac{\partial(x_1', \ldots, x_n')}{\partial(u_1', \ldots, u_n')} = u_1'^{\,m-1}[mj\omega + u_1'\mathfrak{A}],$$

wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u_1', \ldots, u_n')$ sich im Anfange analytisch verhält. Nun ist aber

$$\frac{\partial(x_1', \ldots, x_n')}{\partial(u_1', \ldots, u_n')} = \frac{\partial(x_1', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1', \ldots, u_n')},$$

also:

$$J'' = J'.$$

Mithin muß

$$u_1'^{\,m-1}[mj\omega + u_1'\mathfrak{A}] \equiv u_1'^{\,\lambda}\,\Omega.$$

Die rechte Seite dieser Identität ist genau λ-mal durch u_1' teilbar. Der durch die eckige Klammer ausgedrückte Faktor links ist nicht durch u_1' teilbar. Darum muß

$$m - 1 = \lambda, \qquad mj\omega + u_1'\mathfrak{A} \equiv \Omega$$

sein. Da $\Omega(0, \ldots, 0) \neq 0$ ist, so ergibt sich, daß

$$\omega(0, \ldots, 0) \neq 0$$

ist, was zu beweisen war.

Es bleibt nur noch übrig, die nicht-singuläre Transformation

$$(10)\qquad \begin{aligned} u_1'' &= u_1' \sqrt[m]{\omega}, \\ u_k'' &= u_k', \qquad k=2,\ldots,n, \end{aligned}$$

auszuüben. Hiermit erhalten wir nunmehr die endgültige Transformation:

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1' &= u_1''^m, \\ x_k' &= \Phi_k(u_1'', \ldots, u_n''), \qquad k=2,\ldots,n, \end{aligned}$$

wo

$$\Phi_k(u_1'', \ldots, u_n'') = F_k(u_1', u_2', \ldots, u_n'),$$

$$j = \frac{\partial(\Phi_2, \ldots, \Phi_n)}{\partial(u_2'', \ldots, u_n'')} + u_1'' \mathfrak{A}(u_1'', \ldots, u_n''),$$

und $\mathfrak{A}$ sich im Anfange analytisch verhält.

Durch Einführung einer weiteren Transformation läßt sich das Ergebnis am deutlichsten erkennen. Sei

$$(12)\qquad \xi_1 = u_1'', \qquad \xi_k = \Phi_k(u_1'', \ldots, u_n''), \qquad k=2,\ldots,n.$$

Dann ist

$$\left.\frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(u_1'', \ldots, u_n'')}\right|_{(0)} \neq 0,$$

und die Transformation erweist sich somit als nicht-singulär. Jetzt nimmt (11) die Form an:

$$(13)\qquad x_1' = \xi_1^m, \qquad x_k' = \xi_k, \qquad k=2,\ldots,n.$$

Fassen wir das Resultat in einen Satz zusammen, so können wir sagen[1]):

1. Satz. *Im Falle I läßt sich die vorgelegte Transformation T, d. h. die in der Nähe der Stelle (u^0) betrachtete Transformation* (1), *wie folgt, in Faktoren zerlegen.*

a) *Sei T_1 das Produkt der drei nicht-singulären Transformationen* (2), (10) *und* (12),

$$T_1: \qquad \xi_i = G_i(u_1, \ldots, u_n), \qquad i=1,\ldots,n,$$

$$\left.\frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|_{(u^0)} \neq 0;$$

b) *Sei T_2 die singuläre Transformation* (13);

1) Doch vorläufig noch unter der am Eingange des Beweises vermerkten Einschränkung.

c) *Sei* T_3 *die nicht-singuläre Transformation* (8). *Dann ist*

$$T = T_3^{-1} T_2 T_1.$$

Jetzt werfen wir die Frage auf: Wie erkennt man an den ursprünglichen Funktionen $f_i(u_1, \ldots, u_n)$, ob Fall I oder Fall II vorliegt? Zur Beantwortung dieser Frage dienen die n die Reihe in den Ableitungen von $\mathfrak{F}$ enthaltenden n-reihigen Determinanten aus der Matrix

$$(14) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{matrix} \right\|.$$

Durch die Transformation (2) geht jede dieser Determinanten, bis auf einen nicht verschwindenden Faktor, in die entsprechende Determinante aus der Matrix

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial u_1'} & \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial u_2'} & \ldots & \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial u_n'} \\ \frac{\partial F_1}{\partial u_1'} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2'} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1'} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2'} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n'} \end{matrix} \right\|$$

über, wobei $\mathfrak{F}'$ die transformierte Funktion aus $\mathfrak{F}$ bedeutet, also

$$\mathfrak{F}' = u_1'.$$

Nun erkennt man sofort, daß es im Fall I stets eine n-reihige Determinante aus (15) gibt, welche nicht identisch verschwindet, wenn $u_1' = 0$ gesetzt wird, und also nicht durch u_1' im Anfange teilbar ist. Demgemäß läßt sich die entsprechende Determinante aus (14) zunächst im Punkte (u^0), mithin aber auch im Punkte (b), nicht durch $\mathfrak{F}$ teilen.

Diese Bedingung läßt sich offenbar umkehren, und wir haben somit das Ergebnis.

2. Satz. *Damit Fall* I *vorliege, ist notwendig und hinreichend, daß mindestens eine der n-reihigen Determinanten aus der Matrix* (14) *im Punkte* (b) *nicht durch* $\mathfrak{F}$ *teilbar sei.*

Wir sind nunmehr in der Lage, den in Aussicht gestellten Nachweis zu liefern, daß nämlich im Falle I, bei nicht-spezialisierter Wahl der Stelle (u^0), mindestens eine $(n-1)$-reihige Determinante aus der Matrix (6) im Punkte $(u') = (0)$ nicht verschwindet. Ist etwa

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

im Punkte (b) des Gebildes $\mathfrak{J} = 0$ nicht durch $\mathfrak{J}$ teilbar, so kann Δ doch denkbarerweise dort verschwinden. Dann bilden aber die in der Nähe von (b) belegenen gemeinsamen Nullstellen von $\mathfrak{J}$ und Δ nur eine $(2n-4)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und hiermit sind wir zum folgenden Satze geführt.

3. Satz. *Als brauchbare Stelle* (u^0) *im Fall* I *gilt jede gewöhnliche Stelle des Gebildes* $\mathfrak{J} = 0$, *in welcher kein weiterer Faktor* J_k *von* J *verschwindet und in welcher außerdem mindestens eine* n*-reihige Determinante aus der Matrix* (14) *von null verschieden ist. Hiermit bilden die Ausnahmepunkte des Gebildes* $\mathfrak{J} = 0$ *höchstens eine* $(2n-4)$*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*

Der Vollständigkeit halber fügen wir noch hinzu:

4. Satz. *Damit Fall* II *eintrete, ist notwendig und hinreichend, daß alle* n*-reihigen Determinanten aus der Matrix* (14) *in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{J} = 0$ *verschwinden, und darum auch in* (b) *durch* $\mathfrak{J}$ *teilbar seien.*

Beispiel. Sei

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = uw^2.$$

Dann ist

$$J = 2uw.$$

Die Punkte der Mannigfaltigkeit $J = 0$, wofür

$$\mathfrak{J} = w = 0, \qquad u \neq 0$$

ist, subsumieren sich unter Fall I; diejenigen, wofür

$$\mathfrak{J} = u = 0, \qquad w \neq 0$$

ist, gehören zu Fall II.

Die Zusammensetzung der Transformation (1) im Falle II ist neuerdings von Koopman[1]) des näheren untersucht worden, der zu folgendem Resultate geführt ist.

5. Satz. *Im Falle* II *läßt sich die Transformation* (1) *in der Umgebung einer nicht-spezialisierten Stelle der Jacobischen Fläche* $J=0$ *durch Ausübung einer geeigneten nicht-singulären Transformation unter den* $x_1, \ldots, x_n$ *einerseits, sowie einer ähnlichen Transformation unter den* $u_1, \ldots, u_n$ *andererseits auf die Normalform bringen, wo die* ω_{iq} *im Punkte* (0) *analytisch sind:*

$$\begin{cases} x_1 = u_1^{p_1}, \\ x_i = \sum\limits_{q=0}^{\lambda_i} u_1^{p_i+q}\,\omega_{iq}(u_{i+1}, \ldots, u_n) + u_1^{p_i+\lambda_i} u_i, \\ x_j = u_j; \end{cases}$$

$$i = 2, \ldots, n-r; \qquad j = n-r+1, \ldots, n;$$

$$0 \leqq r \leqq n-2; \qquad 0 \leqq \lambda_{n-r} \leqq \cdots \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_2.$$

Durch die erste und die r letzten dieser Gleichungen erhält man zunächst

$$u_1 = \sqrt[p_1]{x_1}, \qquad u_{n-r+1} = x_{n-r+1}, \ldots, u_n = x_n.$$

Trägt man diese Werte in der letzten der übergebliebenen $n-r-1$ Gleichungen ein, so entsteht hierdurch eine lineare Gleichung zur Bestimmung von u_{n-r}. Aus der zweitletzten Gleichung wird dann u_{n-r-1} in ähnlicher Weise berechnet; usw.

Während im Fall I die $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{J}=0$ auf eine derselben Dimensionalität im (x)-Raume abgebildet wird, tritt dies im Falle II nie ein; vgl. § 23.

Die Determinante Δ tritt wohl zum ersten Male bei Dederick[2]) auf. Im wesentlichen behandelte er Fall I, wenn J im Punkte (b) irreduktibel ist. Clements[3]) knüpfte an das Dederickche Resultat an und behandelte im wesentlichen Fall II, wenn $J = \mathfrak{J}^\lambda$ ist. Doch hatten beide Mathematiker den Begriff der Zerlegung von J in Faktoren nicht, und die Beziehung der von ihnen behandelten Fälle zum allgemeinen Falle $J(b)=0$, $J(u) \not\equiv 0$, wurde nicht aufgedeckt.

---

1) *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) 34 (1928) p. 565.
2) *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913) S. 143.
3) *Bull. Amer. Math. Soc.* 18 (1912) S. 454.

Aus den Untersuchungen dieses Paragraphen geht auch der folgende Satz von Clements[1]) hervor.

6. Satz. *Die Gleichungen* (1) *können niemals eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Umgebung der Stelle* $(u) = (b)$ *und denjenigen der Umgebung der Stelle* $(x) = (a)$ *definieren, wenn* $J(b_1, \ldots, b_n)$ *verschwindet.*

§ 21. Über die Parameterdarstellung im Kleinen.

Wird eine implizite Funktion eines Arguments durch die Gleichung

$$G(x, y) = 0$$

definiert, wobei G im Anfange irreduktibel ist, so läßt sich bekanntlich das entsprechende Gebilde in der Nähe des Anfangs durch ein Gleichungspaar

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

parametrisch darstellen, wobei f und φ beide im Punkte $t = 0$ analytisch sind und dort verschwinden. Des weiteren entspricht nicht nur jedem Werte von t ein Punkt (x, y) des Gebildes, sondern auch umgekehrt führt jeder Punkt des Gebildes zu einem einzigen Werte von t, — beidemal vorausgesetzt, daß man sich auf eine geeignete Nachbarschaft des Anfangs beschränkt.[2])

Der entsprechende Satz würde im allgemeinen Falle, wie folgt, lauten. Vorgelegt sei das Gleichungssystem

$$(1) \qquad G_i(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, l,$$

wobei $G_i(z_1, \ldots, z_n)$ eine im Anfange irreduktible Funktion ist. In jeder Umgebung des Anfangs möge es noch einen zweiten Punkt geben, welcher eine simultane Lösung des Systems (1) liefert. Nach dem zweiten Weierstraßschen Satze, § 17, wird dann ein oder mehrere durch den Anfang gehende Gebilde $\mathfrak{g}$ definiert. Und nun müßten die Koordinaten der in der Nähe des Anfangs

1) a. a. O., S. 453.

2) Damit soll nicht gesagt sein, daß es nicht noch einen anderen Zweig des durch die Gleichung (1) definierten monogenen analytischen Gebildes gibt, der durch die Umgebung des Anfangs hindurchgeht. Es kann deren sogar unendlich viele geben, wie z. B. bei der Funktion $y = x \arcsin x$ im Punkte $x = 0$. Wir haben es aber hier nur mit dem einen zu tun, dessen Punkte der Gleichung $G = 0$ entsprechen.

gelegenen Punkte eines jeden dieser Gebilde parametrisch darstellbar sein, indem man

$$z_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_m), \qquad j=1,\ldots,n \qquad 1 \leqq m \leqq n-1,$$

setzt, wobei $\varphi_j(t_1, \ldots, t_m)$ sich im Anfang analytisch verhält und dort verschwindet, und zwar geschieht dies so, daß zwischen den betreffenden Punkten $(z_1, \ldots, z_n)$ des Gebildes $\mathfrak{g}$, bei gehöriger Zählung ihrer Multiplizität, und den Punkten $(t_1, \ldots, t_m)$ der Umgebung des Anfangs eine ein-eindeutige Beziehung stattfindet.

Dieser Satz ist stets wahr, sofern $m = 1$ ist. In den höheren Fällen, $m > 1$, braucht er jedoch nicht zu gelten, und zwar schon aus dem Grunde, weil der Raum der (t):

$$|t_k| < h, \qquad k=1, \ldots, m,$$

offenbar ein linear einfach zusammenhängender ist, während der Raum der den Gleichungen (1) genügenden, an die Relation

$$|z_j| < g, \qquad j=1,\ldots,n,$$

geknüpften Punkte selbst dann mehrfach zusammenhängen kann, wenn man sich auf eine noch so kleine Nachbarschaft des Anfangs beschränkt, wie das nachstehende Beispiel zeigt.

Beispiel. Sei

$$(2) \qquad G(x, y, u) = yu^2 - 4x^3 + g_2xy^2 + g_3y^3 = 0,$$
$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Die endlichen Punkte dieses Gebildes lassen sich, wie folgt, parametrisch darstellen. Ist zunächst $y \neq 0$, so setze man

$$(3) \qquad x = \varrho\wp(\tau), \qquad y = \varrho, \qquad u = \varrho\wp'(\tau),$$

wobei ϱ nur den Wert 0 meiden soll, während τ in einem geeigneten Periodenparallelogramm T exklusive des Anfangs liegt.

Hieraus kann man noch eine Darstellung gewinnen, wobei die Ausnahmestellung der Punkte $y = 0$ in Wegfall kommt, indem man ϱ durch σ vermöge der Transformation

$$(4) \qquad \varrho = \sigma\tau^3$$

ersetzt. So kommt:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \sigma\tau[\tau^2\wp(\tau)], \\ y = \sigma\tau^3, \\ u = \sigma[\tau^3\wp'(\tau)]. \end{cases}$$

Die in Klammern stehenden Funktionen weisen im Punkte $\tau = 0$ eine hebbare Singularität auf, welche noch durch die gehörige Ergänzung der Definitionen dieser Funktionen in jenem Punkte gehoben werde.

Beschränkt man nun den Punkt (σ, τ) auf den Bereich (S, T), wobei S die ganze endliche σ-Ebene bedeutet, so liefern die Formeln (5) lauter endliche Punkte des Gebildes (2).

Umgekehrt gewinnt man so jeden solchen Punkt (x, y, u), und zwar jeden nur einmal, mit der einzigen Ausnahme des Anfangs $(x, y, u) = (0, 0, 0)$, welchem ja die ganze Mannigfaltigkeit $(0, \tau)$ zugeordnet wird, wobei τ beliebig in T liegt. Mit anderen Worten herrscht eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den endlichen Punkten von (2) und den Punkten des Zylinderbereiches (S, T), bis auf die genannte Ausnahme (ein-eindeutige Beziehung mit einem Fundamentalpunkt und -linie).

Wir können aber nun weitergehen und behaupten: Ist $(x_0, y_0, u_0) \neq (0, 0, 0)$ eine beliebige endliche Stelle von (2), so lassen sich stets zwei der drei Koordinaten x, y, u so wählen, daß, in der Nähe dieser Stelle, umgekehrt σ, τ analytisch von diesen beiden Variabelen abhängen. Ist nämlich $y_0 \neq 0$, so ziehen wir die Gleichungen (3) heran:

$$\varrho = y, \quad \wp(\tau) = \frac{x}{y}, \quad \text{bzw.} \quad \wp'(\tau) = \frac{u}{y}.$$

Die erste der beiden letzten Gleichungen läßt sich nach τ auflösen, sofern nicht gerade

$$u_0 = 0, \qquad \text{also} \qquad \wp'(\tau_0) = 0,$$

ist. Sollte indessen dieser Fall eintreten, so zieht man die letzte der beiden genannten Gleichungen zu Rate. Dann ist sicherlich $\wp''(\tau_0) \neq 0$, denn

$$\wp''(\tau) = 6\wp(\tau)^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

und dieser Ausdruck kann wegen der Relation

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

nicht zugleich mit

$$\wp'(\tau)^2 = 4\wp(\tau)^3 - g_2\wp(\tau) - g_3$$

verschwinden. Endlich wird σ vermöge (4) bestimmt, da τ hier nicht verschwindet.

Ist andererseits $y_0 = 0$, so ist $x_0 = 0$, $u_0 \neq 0$. Wegen der dritten Gleichung (5) muß $\sigma_0 \neq 0$ sein, und wegen der zweiten jener Gleichungen muß somit $\tau_0 = 0$ genommen werden. Wir bilden jetzt die Gleichung

$$\frac{\tau[\tau^2 \wp(\tau)]}{[\tau^3 \wp'(\tau)]} = \frac{x}{u}.$$

Diese läßt sich nach τ auflösen, und zwar so, daß τ analytisch von (x, u) in der Nähe der Stelle (x_0, u_0) abhängt, da nämlich jede der eckigen Klammern im Punkte $\tau = 0$ einen von 0 verschiedenen Wert hat. Endlich erhält man σ aus der Gleichung

$$\sigma = \frac{u}{[\tau^3 \wp'(\tau)]}.$$

Was die Randpunkte (σ, τ) des Bereiches (S, T) anbetrifft, so machen wir eine ähnliche Verabredung wie im Bd. I, Kap. 10, § 6. Ist etwa (σ_0, τ_0), $\sigma_0 \neq 0$, ein solcher, wofür $\tau_0 = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2} t_0 \omega'$, $-1 < t_0 < 1$ ist, und ist (x_0, y_0, u_0) der entsprechende Punkt von (2), so liefert die volle Umgebung von (σ_0, τ_0) die Umgebung der Stelle (x_0, y_0, u_0) von (2). Dabei liegt ein Teil der zugehörigen Punkte (σ, τ) außerhalb (S, T). Diesen entsprechen aber Punkte (σ', τ') dieses Bereiches, indem man

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= \tau - \omega, \\ \sigma' &= \left(\frac{\tau}{\tau - \omega}\right)^3 \sigma \end{aligned}\right\}$$

setzt.

Bemerkt sei noch, daß aus der vorstehenden Parameterdarstellung die Irreduktibilität der Funktion $G(x, y, u)$ im Anfange direkt zu erschließen ist.

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel gewonnen, um das in Aussicht genommene Resultat zu erhalten. Sei also

$$R: \qquad |x| < g, \qquad |y| < g, \qquad |u| < g, \qquad 0 < g,$$

eine beliebig kleine Umgebung des Anfangs $(x, y, u) = (0, 0, 0)$. Innerhalb R werde eine einfache reguläre nicht durch den Anfang gehende geschlossene Kurve C auf der dem Gebilde (2) entsprechenden (vierdimensionalen) Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$, wie folgt, gezogen: τ möge eine Seite des Periodenparallelogramms durchlaufen, während σ zugleich einen kleinen Kreis $|\sigma| = \varepsilon$ beschreibt.

Wir lassen nun diese Kurve C sich stetig ändern, ohne jemals durch den Anfang zu gehen. Ich behaupte: *selbst dann, wenn C nicht auf die Umgebung des Anfangs beschränkt wird, sondern sich frei im Endlichen bewegt, doch so, daß C nie durch den Anfang geht, kann C niemals stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden.*

In der Tat entspricht der Kurve C nach dem Vorausgeschickten in ein-eindeutiger und stetiger Weise eine Kurve Γ des Bereiches (S, T). Ändert sich C stetig, so ändert sich auch Γ stetig; denn die vier-dimensionale Umgebung eines beliebigen Punktes von C wird ein-eindeutig und stetig auf eine entsprechende vier-dimensionale Nachbarschaft des Bildpunktes von Γ bezogen. Daraus folgt aber noch, daß C sich in einem vier-dimensionalen Röhrchen einbetten läßt, dessen Punkte ein-eindeutig und stetig auf die Punkte eines zweiten die Kurve Γ umfassenden Röhrchens bezogen werden.

Es genügt schon, wenn wir solche Kurven C in Betracht ziehen, welche zu Kurven Γ führen, denen reguläre Kurven der σ- und der τ-Ebene entsprechen. Dann wird aber die Kurve der τ-Ebene stets aus einer Breitenkurve der dem Periodenparallelogramm entsprechenden Ringfläche durch stetige Verzerrungen hervorgehen, und daraus folgt dann, daß sie niemals stetig auf einen Punkt zusammenschrumpfen kann.

Wenn also ein stetiges Zusammenziehen von C auf einen Punkt schon im Großen nicht möglich ist, geht das im Kleinen erst recht nicht an.

Angesichts des voraufgehenden Beispiels wird klar, daß der Satz im Falle $n > 2$ doch nur in beschränkterer Formulierung gelten kann. Für den Fall $n = 3$ ist der Beweis von Black[1]) durchgeführt worden. Seine Resultate lauten, wie folgt.

Satz. *Sei $G(x, y, z)$ im Punkte (a, b, c) irreduktibel und sei*

$$T: \qquad |x-a| < h, \qquad |y-b| < h, \qquad |z-c| < h,$$

eine geeignete Umgebung des Punktes (a, b, c). Dann läßt sich das Gebilde

$$G(x, y, z) = 0$$

im Bereiche T durch eine endliche Anzahl parametrischer Formeln

1) *Proceedings Amer. Acad. Arts and Sci.* 37 (1901) S. 287.

folgender Art darstellen:

$$x = f_\varrho(u,v), \qquad y = \varphi_\varrho(u,v), \qquad z = \psi_\varrho(u,v), \qquad \varrho = 1, \ldots, l,$$

wo $f_\varrho, \varphi_\varrho, \psi_\varrho$ *sich in einem Bereiche*

$$\Sigma: \qquad |u| < \gamma, \qquad |v| < \gamma$$

analytisch verhalten. Jedem Punkte $(x_0, y_0, z_0) \neq (a, b, c)$ *von* T *entspricht mindestens ein Wert* ϱ_0, *wofür die Gleichungen*

$$x_0 = f_{\varrho_0}(u,v), \qquad y_0 = \varphi_{\varrho_0}(u,v), \qquad z_0 = \psi_{\varrho_0}(u,v),$$

eine Wurzel in Σ *zulassen, und zwar lassen diese Gleichungen dann niemals eine zweite Wurzel in* Σ *zu.*

Dem Punkte (a, b, c) *entspricht stets ein Punkt in* Σ *für jeden Wert von* ϱ. *Es kann vorkommen, daß die Funktionen* $f_\varrho, \varphi_\varrho, \psi_\varrho$ *so gewählt werden können, daß sich nur ein Punkt ergibt. Im allgemeinen trifft dies indessen nicht zu, es gibt vielmehr für jeden Wert von* ϱ *eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Stellen in* Σ, *welche den Punkt* (a, b, c) *liefern.*

Aus dem Blackschen Satze kann man eine gewisse Einsicht in die Fälle $n > 3$ gewinnen, indem man den besonderen Fall $G(z_1, \ldots, z_n) = G(z_1, z_2, z_3)$ betrachtet. So erkennt man denn, sofern eine Verallgemeinerung des Satzes wirklich stattfindet[1]), daß dem Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ im allgemeinen nicht nur ein Punkt in jedem Bereich Σ entsprechen wird, sondern daß die Punkte einer $(2n-4)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit diesem zugeordnet werden. Des weiteren wird der Punkt (a) auch nicht mehr der einzigste in T sein, dem die Punkte solcher Mannigfaltigkeiten entsprechen, vielmehr wird es deren eine $(2n-6)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in T geben.

§ 22. **Fortsetzung. Ein Beispiel.**

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gezeigt, daß ein durch eine Gleichung

$$(1) \qquad G(x, y, z) = 0$$

definiertes Gebilde, wo G im Anfang irreduktibel ist, nicht stets

---

1) Weierstraß gab an, daß eine Verallgemeinerung gelte, ohne jedoch näher zu präzisieren, worin dieselbe besteht; *Werke* 3, S. 103—104. Die Kobbsche Behandlung der Sache ist völlig ungenügend; *Journ. de math.* (4) 8 (1892) S. 385.

durch eine Parameterdarstellung

$$(2) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

wo f, φ, ψ sich im Anfang analytisch verhalten und dort verschwinden, in der Nähe des Anfangs uniformisiert werden kann.

Wir wollen jetzt das Umgekehrte dartun, indem wir durch folgendes Beispiel feststellen, daß ein durch die Gleichungen (2) definiertes Gebilde nicht notwendig einer Relation von der Form (1) genügt.

In der Tat sei[1])

$$(A) \qquad x = u, \qquad y = uv, \qquad z = uve^v,$$

und sei $G(x, y, z)$ eine im Anfang analytische Funktion, welche wir nun in eine Reihe homogener Polynome entwickeln wollen:

$$G(x, y, z) = G_0 + G_1 + G_2 + \cdots$$

Setzen wir

$$G_n = A_0 x^n + (A_1 y + B_1 z) x^{n-1} + (A_2 y^2 + B_2 yz + C_2 z^2) x^{n-2} + \cdots,$$

und tragen wir hier die Werte von x, y, z aus (A) ein, so kommt:

$$(3) \qquad u^n \{A_0 + (A_1 + B_1 e^v) v + (A_2 + B_2 e^v + C_2 e^{2v}) v^2 + \cdots\} \cdot$$

Soll nun $G(x, y, z)$ durch die Funktionen (A) identisch zum Verschwinden gebracht werden, so muß die Entwicklung von G nach aufsteigenden Potenzen von u gliedweise verschwinden. Demnach muß die in (3) stehende geschweifte Klammer identisch verschwinden.

Hieraus folgt aber zunächst, daß A_0 und die aus den runden Klammern bestehenden Koeffizienten der Potenzen von v einzeln verschwinden. Denn, sei $v = v_1$ ein beliebiger Wert von v. Dann verschwindet die geschweifte Klammer insbesondere für die Werte[2])

$$(4) \qquad v = v_1 + 2k\pi i, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Das gibt aber $n + 1$ lineare homogene Gleichungen in A_0 und den

1) Osgood, *Transactions Amer. Math. Soc.* 17 (1916) S. 2.

2) Es könnte befremden, daß wir Werte von v benützen, welche nicht in der Nähe des Anfangs liegen. Da aber jede geschweifte Klammer eine ganze Funktion von v ist, welche identisch verschwindet, so ist dies offenbar erlaubt.

n runden Klammern, und zwar besteht die Determinante derselben aus dem Produkt der Differenzen der Zahlen (4).

Daraus erkennt man endlich, daß auch die einzelnen Koeffizienten verschwinden müssen. Denn ein Ausdruck von der Form

$$A + Be^{v} + Ce^{2v} + \cdots (m + 1 \text{ Glieder})$$

geht durch die Transformation

$$\xi = e^{v}$$

in ein Polynom über.

Will man das Beispiel auf mehr als drei Variabele x, y, z ausdehnen, so kann man das vorstehende Beispiel als solches betrachten, indem man die weiteren Koordinaten direkt gleich den bezüglichen Parametern setzt.

§ 23. Vom identischen Verschwinden der Jacobischen Determinante.

1. Satz. *Sei* $f_i(u_1, \ldots, u_n; y_1, \ldots, y_m) = f_i(u, y)$, $i=1,\ldots,n$, *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_n; \beta_1, \ldots, \beta_m) = (b, \beta)$ *analytisch, und sei*

$$f_i(b, \beta) = a_i, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Verschwindet dann die Jacobische Determinante

$$J = \frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (u_1, \ldots, u_n)}$$

identisch in allen $n + m$ *Argumenten, so gibt es einen in einer beliebig vorgeschriebenen Umgebung des Punktes* $(a_1, \ldots, a_n; \beta_1, \ldots, \beta_m) = (a, \beta)$ *belegenen Punkt* $(a'_1, \ldots, a'_n; \beta'_1, \ldots, \beta'_m) = (a', \beta')$ *und eine im Punkt* (a', β') *analytische, und zwar dort irreduktible Funktion* $\Omega(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ *derart, daß, wenn man in letztere*

$$(1) \qquad x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n; y_1, \ldots, y_m), \qquad i=1,\ldots,n,$$

einträgt, die Funktion Ω *dadurch identisch zum Verschwinden gebracht wird.*

Insbesondere dürfen die Variabelen $y_1, \ldots, y_m$ *sämtlich fehlen.*

Der vorstehende Satz ist bloß ein besonderer Fall des folgenden Satzes, dessen Beweis denn auch den Beweis jenes Satzes mit einbegreift.

2. Satz. Der verallgemeinerte Satz. *Sei* $f_i(u_1, \ldots, u_n; y_1, \ldots, y_m)$, $i=1,\ldots,p$, *im Punkte* $(b_1, \ldots, b_n; \beta_1, \ldots, \beta_m) = (b, \beta)$ *analytisch, und sei*

$$f_i(b, \beta) = a_i, \qquad i=1,\ldots,p.$$

Verschwindet dann jede Determinante $(\varrho + 1)$*-ter Ordnung aus der Matrix*

$$(2) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial u_n} \end{array} \right\|,$$

wo $\varrho \geqq 0$ *und kleiner als die kleinere der beiden Zahlen* n, p *ist, identisch, so gibt es einen in einer beliebig vorgeschriebenen Umgebung des Punktes* $(a_1, \ldots, a_p; \beta_1, \ldots, \beta_m) = (a, \beta)$ *gelegenen Punkt* (a', β'), *wobei*

$$a'_i = f_i(b', \beta'), \qquad i=1,\ldots,p,$$

ist, und ferner gibt es, bei passender Wahl der Indizes der Funktionen f_i, $p - \varrho$ *im Punkte* $(a'_1, \ldots, a'_\varrho, \beta'_1, \ldots, \beta'_m)$ *analytische Funktionen* ω_k *derart, daß die Gleichungen*

$$(3) \qquad x_k = \omega_k(x_1, \ldots, x_\varrho;\ y_1, \ldots, y_m), \qquad k=\varrho+1,\ldots,p,$$

durch die Substitution

$$(4) \qquad x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n;\ y_1, \ldots, y_m), \qquad i=1,\ldots,p,$$

identisch erfüllt werden:

$$(5) \qquad f_k \equiv \omega_k(f_1, \ldots, f_\varrho;\ y_1, \ldots, y_m), \qquad k=\varrho+1,\ldots,p,$$

wobei nun die Argumente aus den Variabelen $u_1, \ldots, u_n; y_1, \ldots, y_m$ *bestehen und in der Umgebung des Punktes* (b', β') *gelegen sind.*

Insbesondere darf jede Stelle (u, y) *als Punkt* (b', β') *genommen werden, an welcher eine Determinante* ϱ*-ter Ordnung aus der Matrix* (2) *nicht verschwindet.*

Im Falle $\varrho = 0$ ist der Satz evident, da hier keine Funktion f_i von den (u) abhängt und ω_k keine Argumente (x) enthält, sondern nur von den (y) abhängt, also einfach $= f_k$, $k = 1, \ldots, p$, gesetzt werden soll. Sollten auch die (y) fehlen, so würden sich die Gleichungen (3) auf das System $x_k = c_k$ reduzieren, wo c_k eine Konstante bedeutet.

Sei also $\varrho > 0$. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Determinante

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_\varrho)}{\partial(u_1, \ldots, u_\varrho)}$$

nicht identisch verschwindet. Denn erstens gilt der Satz offenbar für ϱ, wenn er schon für $\varrho' < \varrho$ gilt; und zweitens ist es ja nur eine Frage der Bezeichnung, ob gerade diese oder eine andere Determinante ϱ-ter Ordnung nicht identisch verschwindet.

Sei nun $(b_1', \ldots, b_n'; \beta_1', \ldots, \beta_m') = (b', \beta')$ ein Punkt der Umgebung von (b, β), in welchem J nicht verschwindet, und wofür außerdem der Punkt (a', β') in der genannten Nachbarschaft von (a, β) liegt.

Alsdann lassen sich die ersten ϱ der Gleichungen (4), $i = 1, \ldots, \varrho$, in der Nähe des Punktes (b', β') nach $u_1, \ldots, u_\varrho$ analytisch auflösen:

$$u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_\varrho;\; u_{\varrho+1}, \ldots, u_n;\; y_1, \ldots, y_m), \qquad i=1,\ldots,\varrho.$$

Trägt man diese Funktionen in den letzten $p - \varrho$ der Gleichungen (4) an Stelle von u_i ein, so kommt:

$$\begin{aligned} x_k &= f_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_\varrho;\; u_{\varrho+1}, \ldots, u_n;\; y_1, \ldots, y_m) \\ &= \omega_k(x_1, \ldots, x_\varrho;\; u_{\varrho+1}, \ldots, u_n;\; y_1, \ldots, y_m). \end{aligned} \qquad k=\varrho+1,\ldots,p.$$

Und nun behaupte ich: die Funktion ω_k hängt nicht von u_l, $l=\varrho+1,\ldots,n$, ab.

In der Tat wird die Ableitung $\frac{\partial \omega_k}{\partial u_l}$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial u_l} = \frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_l} + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial u_\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial u_l} + \frac{\partial f_k}{\partial u_l},$$

$$0 = \frac{\partial f_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_l} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial u_\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial u_l} + \frac{\partial f_j}{\partial u_l},$$

wobei k unter den Zahlen $\varrho + 1, \ldots, n$ beliebig gewählt und dann festgehalten wird, während j sukzessiv die Werte $1, \ldots, \varrho$ durchläuft. Nach der Theorie der linearen Abhängigkeit[1]) läßt sich die

1) Bôcher, *Algebra*, Kap. 3. Insbesondere beruht unser Beweis bloß auf den allgemeinen Entwicklungen bei Bôcher, Nrn. 13, 14. Will man noch den 1. Satz von Nr. 16 dort voraussetzen, so ergibt sich unser Resultat daraus ohne weiteres.

rechte Seite der ersten dieser Gleichungen linear durch die rechten Seiten der übrigen ϱ Gleichungen ausdrücken, und da nun die $\varrho + 1$ Gleichungen bekanntlich eine simultane Lösung zulassen, so muß eben

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial u_l} = 0$$

sein.

Die beiden soeben bewiesenen Sätze rühren von Jacobi[1]) her. Im Jahre 1841 war die Notwendigkeit von Existenzbeweisen den Mathematikern in weiteren Kreisen noch nicht zum Bewußtsein gekommen[2]), und so kann denn Jacobi kein großer Vorwurf daraus gemacht werden, daß er nach dieser Seite hin keine höheren Anforderungen der Strenge erkannte als die große Mehrzahl seiner Zeitgenossen. Immerhin ist das von Jacobi zugrunde gelegte Prinzip, daß durch eine Gleichung niemals mehr als eine Variabele durch die übrigen bestimmt werden kann, nicht unanfechtbar, wenn man wie Jacobi nichts über die Natur der Gleichungen festsetzt, da etwa die eine Gleichung

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 0$$

oder auch im Bereiche reeller Veränderlichen

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 0$$

zugleich alle n Variabelen $z_1, \ldots, z_n$ bestimmt.

Auf Grund der Entwicklungen des gegenwärtigen Kapitels — und dies ist hauptsächlich das Verdienst von Cauchy und Weierstraß — sind diese Lücken nunmehr ausgefüllt.

Andererseits ist es Jacobi hoch anzurechnen, daß er die Prinzipien der Transformation der unabhängigen Variabelen bei der partiellen Differentiation klar erkannt und mit Deutlichkeit auseinandergesetzt hat.[3])

---

1) Jacobi, De Determinantibus functionalibus, *Journ. für Math.*, Bd. 22 (1841), S. 319, deutsch herausgegeben von P. Stäckel, Ostwalds *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 78. Der 2. Satz des Textes findet sich daselbst in Nr. 15.

2) Einer der ersten solchen Beweise stammt aus Cauchys Turiner Abhandlung vom Jahre 1831; vgl. Bd. I, S. 65 Anm. Auch stellte Weierstraß im Jahre 1842 einen Existenzbeweis für gewöhnliche Differentialgleichungen her: *Werke*, Bd. 1 (1894), S. 82.

3) Jacobi, a. a. O. Nr. 2. Vgl. auch Kap. 1, § 5.

§ 24. Fortsetzung. Über die Wahl des Punktes (α', β').[1]

Es liegt die Frage nahe, ob der Punkt (a', β') des voraufgehenden Paragraphen im Falle des 1. Satzes nicht einfach mit (a, β) zusammenfallen darf. Darauf gibt folgender Satz Antwort.

1. Satz. *Im Falle $n = 2$ gilt der 1. Satz von § 23 ausnahmslos, wie man auch immer den Punkt (a', β') in der Nähe von (a, β) annimmt, vorausgesetzt nur, daß keine der Funktionen*

$$f_i(u_1, u_2, \beta_1, \ldots, \beta_m)$$

sich auf eine Konstante reduziert.

Er gilt ferner, wie man auch immer den Punkt $(a') = (a_1', a_2')$ in der Nähe des Punktes $(a) = (a_1, a_2)$ annimmt, vorausgesetzt, daß keine der Funktionen f_i von $(y_1, \ldots, y_m)$ abhängt; und er ist evident, wenn eine dieser Funktionen nur von $(y_1, \ldots, y_m)$ abhängt.

Ist dagegen $n > 2$, so kann der Punkt (a', β') im allgemeinen nicht willkürlich gewählt werden.

Indem wir die vorgelegten Gleichungen (1) in der Form schreiben,

$$(6) \quad f_1(u, v, y_1, \ldots, y_m) - x_1 = 0, \qquad f_2(u, v, y_1, \ldots, y_m) - x_2 = 0,$$

können wir diese, unter Benützung der Bedingung betreffend $f_i(u, v, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ und nach eventueller Anwendung einer linearen Transformation auf u, v, vermöge des Vorbereitungssatzes durch folgende ersetzen,

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} F(v, u, x_1, y_1, \ldots, y_m) = v^p + A_1 v^{p-1} + \cdots + A_p = 0, \\ \Phi(v, u, x_2, y_1, \ldots, y_m) = v^q + B_1 v^{q-1} + \cdots + B_q = 0, \end{cases}$$

wo F, Φ irreduktible Pseudopolynome mit der Spitze im Punkte $(u_0, a_1, a_2, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ bedeuten.

Damit die Gleichungen (A) gleichzeitig bestehen, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Resultante R verschwindet. Diese kann nicht identisch verschwinden, da sonst die Funktionen (A) und somit auch die Funktionen (5) einen gemeinsamen Teiler hätten. Dies ist aber widersinnig, denn ein solcher Teiler kann x_2 nicht enthalten, da er die erste Funktion dividiert, und ebenso wenig kann er x_1 enthalten. Würde nun aber

$$f_1(v, u, y_1, \ldots, y_m) - x_1 = \mathfrak{Q}(v, u, x_1, y_1, \ldots, y_m) \Psi(v, u; y_1, \ldots, y_m)$$

1) Osgood, *Transactions Amer. Math. Soc.* 17 (1916) S. 4.

sein, so braucht man nur beide Seiten dieser Identität nach aufsteigenden Potenzen von $x_1 - a_1$ zu entwickeln, um dann die Koeffizienten des linearen Gliedes miteinander zu vergleichen. Da

$$\Psi(v_0, u_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$$

ja verschwindet, so ist der in Aussicht genommene Widerspruch hiermit geliefert.

In gleicher Weise zeigt man, daß R auch nicht durch $u - u_0$ teilbar sein kann, da R sonst in den übrigen Variabelen identisch verschwinden würde, wenn $u = u_0$ gesetzt wird.

Wir schreiben nun R in der Form

$$R(u, x_1, x_2, y_1, \ldots, y_m) = \Omega_1(x_1, x_2, y)\, Q(u, x_1, x_2, y),$$

wobei Q durch keine Funktion von (x_1, x_2, y) im Punkte (u_0, a_1, a_2, β) teilbar ist. Und jetzt behaupte ich: Die Funktion Q verschwindet nicht im Punkte (u_0, a_1, a_2, β). Der Einfachheit halber werde $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ gesetzt.

In der Tat entwickle man Q nach aufsteigenden Potenzen von u:

$$Q(u, x_1, x_2, y) = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \cdots,$$

wobei denn $C_k(x_1, x_2, y)$ sich im Punkte (a_1, a_2, β) analytisch verhält. Vor allem ist klar, daß $C_0(x_1, x_2, y)$ nicht identisch verschwindet, da Q und somit auch R sonst durch u teilbar sein müßte.

Des weiteren muß $C_0(a_1, a_2, \beta) \neq 0$ sein. Im anderen Falle sei $C(x_1, x_2, y)$ ein im Punkte (a_1, a_2, β) irreduktibler Faktor von $C_0(x_1, x_2, y)$. Dann gibt es einen Koeffizienten $C_k(x_1, x_2, y)$, welcher nicht durch $C(x_1, x_2, y)$ teilbar ist. Demgemäß gibt es auch in jeder Umgebung der Stelle (a_1, a_2, β) einen Punkt (a_1', a_2', β'), in welchem

$$C_0(a_1', a_2', \beta') = 0, \qquad C_k = (a_1', a_2', \beta') \neq 0.$$

Hieraus erkennt man, daß

$$Q(0, a_1', a_2', \beta') = 0, \qquad Q(u, a_1', a_2', \beta') \not\equiv 0$$

ist. Darum läßt sich der Weierstraßsche Vorbereitungssatz auf die Funktion Q anwenden, woraus denn folgt, daß es in der Umgebung der Stelle (a_1', a_2', β') einen Punkt (a_1'', a_2'', β'') gibt, in dessen Nachbarschaft die Gleichung

$$Q(u, x_1, x_2, y) = 0,$$

und somit auch die Gleichung

$$R(u, x_1, x_2, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

eine analytische Lösung:

$$u = \varphi(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_m)$$

zuläßt.

Trägt man diese Funktion an Stelle von u in F und Φ ein, so gehen letztere Funktionen in zwei Pseudopolynome über, deren Spitzen im Punkte (a_1'', a_2'', β'') liegen, und welche fernerhin einen gemeinsamen Teiler besitzen. Dieser weist aber eine Wurzel

$$v = \psi(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_m)$$

auf, welche entweder schon im Punkte (a_1'', a_2'', β'') selbst oder doch wenigstens in einem benachbarten Punkte $(a_1''', a_2''', \beta''')$ sich analytisch verhält.

Hiermit sind wir nun zu einem Widerspruch geführt worden. Denn diese beiden Funktionen

$$u = \varphi, \qquad v = \psi$$

liefern ja eine analytische Umkehrung der Gleichungen (6) in einem Punkte, wo die Jacobische Determinante derselben verschwindet, und dies verstößt eben gegen den 1. Satz von § 19.

Die hiermit gewonnene Funktion Ω_1 führt direkt zu der in Aussicht genommenen Funktion:

$$\Omega(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_m).$$

In der Tat sei Ω ein im Punkte (a_1, a_2, β) irreduktibler Teiler von Ω_1. Sei (a_1', a_2', β') eine Wurzel von $\Omega(x_1, x_2, y)$. Dann gibt es eine gemeinsame Lösung $u = b'$, $v = c'$ der Gleichungen (A) und somit auch der Gleichungen (6), wenn $(y) = (\beta')$ und $x_i = a_i'$ gesetzt wird.

Läßt man nun den Punkt $(v, u, y_1, \ldots, y_n)$, von $(c', b', \beta_1', \ldots, \beta_m')$ ausgehend, beliebig wandern, und bestimmt man x_1, x_2 durch (6), so muß R durchweg verschwinden. Es ist jetzt nicht schwer zu zeigen, daß Ω dabei stets verschwindet, sowie daß Ω_1 keinen anderen irreduktiblen Teiler haben kann, welcher mit Ω nicht äquivalent wäre.

Daß die Bedingung: „vorausgesetzt nur, daß keine der Funktionen $f_i(u_1, u_2, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ sich auf eine Konstante reduziert“

nicht bloß für den Beweis, sondern auch für das Bestehen des Satzes wesentlich war, zeigt folgendes Beispiel:

$$f_1(u, v, y) = yv, \qquad f_2(u, v, y) = yve^v, \qquad (b, \beta) = (0, 0).$$

Würde es hier eine im Anfange analytische, dort irreduktible Funktion $\Omega(x_1, x_2, y)$ geben, welche durch Einsetzen der Funktionen

$$x_1 = yv, \qquad x_2 = yve^v,$$

identisch zum Verschwinden gebracht würde, so entwickele man Ω nach homogenen Polynomen in (x_1, x_2, y):

$$\Omega(x_1, x_2, y) = G_0 + G_1 + G_2 + \cdots,$$

wobei G_k homogen in x_1, x_2, y vom Grade k ist bzw. identisch verschwindet.

Vor allem ist klar, daß $G_0 = 0$ ist. Ferner wird

$$G_k(x_1, x_2, y) = y^k G_k(v, ve^v, 1).$$

Daher muß $G_k(v, ve^v, 1)$ identisch verschwinden. Und nun erkennt man, ähnlich wie bei der Behandlung des Beispiels von § 22, daß dies nur dann möglich ist, wenn jeder Koeffizient von G_k verschwindet.

Der Fall, daß keine der Funktionen f_1, f_2 von (y) abhängt, erledigt sich nun von selbst. Wenn eine dieser Funktionen eine Konstante ist, so ist der Satz ja evident. Hängen dagegen beide schon von u, v ab, so bleibt der vorstehende Beweis noch in Kraft.

Um den letzten Teil des Satzes zu beweisen, berufen wir uns auf das in § 22 behandelte Beispiel

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = uve^v. \tag{7}$$

Hier ist $n = 3$, $u_1 = u$, $u_2 = v$; die Funktionen f_i hängen von u_3 nicht ab. Nach dem Ergebnis jenes Paragraphen gibt es keine im Punkte $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ analytische Funktion $\Omega(x, y, z)$, welche durch die Funktionen (7) identisch zum Verschwinden gebracht wird.

Ein zweites Beispiel ergibt sich dadurch, daß wir hier uw an Stelle von u treten lassen:

$$x_1 = uw, \qquad x_2 = uvw, \qquad x_3 = uvwe^v.$$

Für den Fall, daß die Funktionen f_i, $(i = 1, 2)$, nicht von $(y_1, \ldots, y_m)$ abhängen, hat Bliss[1]) den Satz bewiesen.

2. Satz. *Sei*
$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v),$$
wo f und φ sich beide im Anfange analytisch verhalten und dort verschwinden, und außerdem keine dieser Funktionen identisch verschwindet. Verschwindet die Jacobische Determinante
$$J = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(u, v)}$$
identisch, so ist jeder im Anfange irreduktible Faktor von f auch Faktor von φ und umgekehrt.

Dem soeben bewiesenen Satze zufolge genügen f und φ einer Identität von der Form:
$$\Omega(f, \varphi) = 0,$$
wo $\Omega(x, y)$ im Anfange irreduktibel ist. Der Weiterbildung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes zufolge, S. 88, werden die Nullstellen des Gebildes $\Omega(x, y) = 0$ durch eine ausgezeichnete irreduktible pseudoalgebraische Gleichung
$$x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m = 0 \tag{8}$$
gegeben, wobei nun jeder Koeffizient $A_k = A_k(y)$ durch y teilbar ist. Demgemäß hat man
$$f^m = - A_1(\varphi) f^{m-1} - \cdots - A_m(\varphi),$$
woraus denn hervorgeht, daß f^m durch φ teilbar ist. Mithin ist f durch jeden irreduktiblen Faktor von φ teilbar, und da f und φ ja ihre Rollen vertauschen dürfen, so gilt auch das Umgekehrte.

Das Gebilde (8) läßt sich bekanntlich in der Nähe des Anfangs, wie folgt, uniformisieren:
$$x = t^p g(t), \qquad y = t^q h(t),$$
wobei g und h sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhalten und dort nicht verschwinden; und wo ferner jeder Stelle des Gebildes (8) nur ein einziger Wert von t entspricht. Daraus erhellt, daß t eine eindeutige Funktion von (u, v) in der Nähe des Anfangs ist, welche in jedem Punkte dieser Umgebung stetig ist und sich,

1) *Princeton Colloquium*, 1909, erschienen 1913, § 12.

höchstens mit Ausnahme des Anfangs, analytisch verhält. Mithin ist

$$t = \theta(u, v)$$

in der ganzen Nachbarschaft analytisch. Sei

$$\theta = \theta_1^{\lambda_1} \theta_2^{\lambda_2} \ldots,$$

wo $\theta_1(u, v), \ldots$ die irreduktiblen Faktoren von $\theta(u, v)$ bedeuten. Dann ist

$$f(u, v) = \theta_1^{p\lambda_1} \theta_2^{p\lambda_2} \ldots \mathfrak{E},$$

$$\varphi(u, v) = \theta_1^{q\lambda_1} \theta_2^{q\lambda_2} \ldots \mathfrak{E}',$$

wobei $\mathfrak{E}(u, v)$, $\mathfrak{E}'(u, v)$ sich beide im Anfange analytisch verhalten und dort nicht verschwinden. Hiermit ist folgender Satz bewiesen.

Zusatz. *Kommt ein im Anfang irreduktibler Faktor $\theta_k(u, v)$ μ_k-mal in $f(u, v)$ vor, so kommt $\theta_k(u, v)$ auch genau $(p/q)\mu_k$-mal in $\varphi(u, v)$ vor, wobei p, q zwei Zahlen sind, welche für alle Faktoren θ_k den gleichen Wert beibehalten.*

§ 25. Von der Matrix eines Gleichungssystems.

Der zweite Weierstraßsche Satz, § 17, gab keine nähere Bedingung dafür an, wie hoch der Maximalwert ϱ jener Stufen anzusteigen vermag. Im Falle linearer Gleichungen bestimmt sich dieser Wert bekanntlich[1]) allgemein aus dem Range der Matrix, und es handelt sich jetzt um die Verallgemeinerung jener Sätze.

1. Satz. *Vorgelegt sei ein System simultaner Gleichungen:*

$$\text{(A)} \qquad G_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \ \ldots, \ G_l(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wobei $G_k(z_1, \ldots, z_n)$, ${\scriptstyle k=1,\ldots,l}$, eine im Punkte $(z) = (a)$ irreduktible Funktion bedeutet. Sei $\mathfrak{M}$ die Matrix aus den Ableitungen dieser Funktionen:

$$\mathfrak{M}: \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial G_1}{\partial z_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial G_l}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial G_l}{\partial z_n} \end{matrix} \right\|.$$

1) Bôcher, *Algebra*, Kap. 3, 4.

Des weiteren möge jede Determinante $(\sigma+1)$-ter Ordnung, wobei σ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen n, l ist, identisch verschwinden.

Gibt s nun eine Determiante σ-ter Ordnung, J, welche in einem Punkte (a') eines Gebildes $\mathfrak{g}$ ϱ-ter Stufe (§ 17) *nicht verschwindet, so ist*

$$\varrho+\sigma=n.$$

Bei geeigneter Wahl der Bezeichnung kann man J, wie folgt, annehmen:

$$J=\frac{\partial(G_1,\ldots,G_\sigma)}{\partial(z_{n-\sigma+1},\ldots,z_n)}.$$

Nach der zum Beweise des 2. Satzes von § 23 benützten Methode zeigt man dann, daß $l-\sigma$ Identitäten von der Form bestehen:

$$(1)\qquad G_{\sigma+\lambda}=\Omega_\lambda(G_1,\ldots,G_\sigma),\qquad \lambda=1,\ldots,l-\sigma.$$

wobei die n Argumente (z) der l Funktionen G_k einem beliebigen Punkte der Umgebung von (a') entsprechen, und $\Omega_\lambda(x_1,\ldots,x_\sigma)$ sich im Punkte $(x)=(0)$ analytisch verhält und dort verschwindet.

Wegen der Bedingung $J\neq 0$ im Punkte (a') lassen sich die ersten σ Gleichungen $G_1=0,\ldots,G_\sigma=0$ nach den Variabelen $z_{n-\sigma+\mu}$ auflösen:

$$z_{n-\sigma+\mu}=\psi_\mu(z_1,\ldots,z_{n-\sigma}),\qquad \mu=1,\ldots,\sigma,$$

wo ψ_μ sich im Punkte $(a'_1,\ldots,a'_{n-\sigma})$ analytisch verhält und dort den Wert $a'_{n-\sigma+\mu}$ annimmt. Den Relationen (1) zufolge genügt der so erhaltene Punkt (z) sämtlichen l Gleichungen (A), und alle in der Nähe von (a') gelegenen Wurzeln von (A) werden auch so erhalten.

Hiermit hat sich ergeben, daß die Gleichungen (A) ein Gebilde $\mathfrak{g}$ $(n-\sigma)$-ter Stufe in der Nähe des Punktes (a') definieren, und daher ist $\varrho=n-\sigma$, w. z. b. w.

2. Satz. *Ersetzt man im 1. Satze die letzte Bedingung, daß eine Determinante σ-ter Ordnung in einer gemeinsamen Nullstelle (a') der l Gleichungen* (A) *nicht verschwinde, durch die andere, daß nämlich*

$$\sigma>n-\varrho$$

sei, wobei ϱ die Stufe eines Gebildes $\mathfrak{g}$ (§ 17) *bedeutet, so muß jede Determinante σ-ter Ordnung längs $\mathfrak{g}$ identisch verschwinden.*

Im übrigen kann der Fall $\sigma<n-\varrho$ nicht eintreten.

Die Richtigkeit des ersten Teils des Satzes erhellt sofort. Würde nämlich eine Determinante σ-ter Ordnung in einem Punkte von $\mathfrak{g}$ nicht verschwinden, so würde allen Bedingungen des 1. Satzes genügt sein, und mithin würde $\sigma = n - \varrho$ sein.

Endlich ist der Fall $\sigma < n - \varrho$ deshalb unmöglich, da die Stufe, ϱ, eines durch die ersten σ Gleichungen $G_1 = 0, \ldots, G_\sigma = 0$ bestimmten Gebildes nicht kleiner als $n - \sigma$ sein kann,

$$\varrho \geqq n - \sigma,$$

und da ferner wegen (1) die Punkte dieses Gebildes auch den weiteren Gleichungen $G_{\sigma+\lambda} = 0$, ${\scriptstyle \lambda=1,\ldots,l-\sigma}$, genügen.

§ 26. Fortsetzung. Weitere Sätze über die Abhängigkeit in einem Gleichungssysteme.

Kehren wir wieder zum Gleichungssystem (A), § 17, zurück und betrachten wir ein Gebilde $\mathfrak{g}$ ϱ-ter Stufe, an welchem sämtliche $G_k(z_1, \ldots, z_n)$, ${\scriptstyle k=1,\ldots,l}$, verschwinden. Bei geeigneter Wahl der Indizes kann man erreichen, daß $\mathfrak{g}$ durch die ersten $n - \varrho$ Gleichungen bestimmt wird — durch weniger als $n - \varrho$ Gleichungen kann ja $\mathfrak{g}$ in keinem Falle bestimmt werden. Dann liegt es nahe, zu sagen, diese $n - \varrho$ Gleichungen seien *unabhängig voneinander in bezug auf* $\mathfrak{g}$, während die übrigen $l - n + \varrho$ Gleichungen eine Folge *von diesen in bezug auf* $\mathfrak{g}$ sind. Diese Definition drückt eine Eigenschaft aus, welche gegenüber einer beliebigen nicht-singulären analytischen Transformation der (z) erhalten bleibt. Übt man andererseits eine nicht-singuläre lineare Transformation auf die l G_k aus, so wird es wiederum $n - \varrho$ der transformierten G'_k geben, welche in bezug auf $\mathfrak{g}$ voneinander unabhängig sind, während die übrigen G'_k in bezug auf $\mathfrak{g}$ eine Folge dieser sind.

Nun kann es aber vorkommen, daß der einem bestimmten Gebilde entsprechende Wert von ϱ verschieden ist von dem einem anderen Gebilde zugehörigen Werte ϱ', wie das folgende Beispiel zeigt:

$$(1) \qquad G_1 = z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0, \qquad G_2 = z_1 z_2 + z_3 z_4 = 0, \qquad G_3 = z_1 - z_3 = 0.$$

Hier bestimmen die beiden ersten Gleichungen die Gebilde:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{g}_1\colon\; z_1 = 0,\;\; z_3 = 0; \qquad &&\mathfrak{g}_2\colon\; z_1 = 0,\;\; z_4 = 0; \\ &\mathfrak{g}_3\colon\; z_2 = 0,\;\; z_3 = 0; \qquad &&\mathfrak{g}_4\colon\; z_2 = 0,\;\; z_4 = 0. \end{aligned}$$

Die Punkte von $\mathfrak{g}_1$ sind sämtlich Wurzeln der dritten Gleichung $G_3 = 0$. Hier ist also

$$\varrho = 2, \qquad n - \varrho = 2,$$

und die drei Gleichungen (1) sind in bezug auf $\mathfrak{g}_1$ voneinander abhängig.

Dagegen gehören die Punkte des zweiten Gebildes, $\mathfrak{g}_2$, nicht alle zum Orte $G_3 = 0$, vielmehr hat man jetzt als gemeinsames Gebilde das folgende:

$$z_1 = 0, \qquad z_3 = 0, \qquad z_4 = 0.$$

Dieses Gebilde liegt jedoch auf $\mathfrak{g}_1$ und liefert also nichts Neues. Ebenso geht aus $\mathfrak{g}_3$ das Gebilde

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad z_3 = 0$$

hervor, welches auch auf $\mathfrak{g}_1$ liegt. Wenn man aber die Punkte von $\mathfrak{g}_4$ betrachtet, in denen G_3 verschwindet, so erhält man ein Gebilde erster Stufe,

$$\mathfrak{g}_5\colon \qquad z_1 = z_3, \qquad z_2 = 0, \qquad z_4 = 0;$$

$$\varrho = 1, \qquad n - \varrho = 3.$$

In bezug auf $\mathfrak{g}_5$ sind also die drei vorgelegten Gleichungen (1) voneinander unabhängig.

Angesichts dieses Tatbestandes ist der Begriff der Unabhängigkeit eines Gleichungssystems offenbar komplizierter, als es der Fall sein würde, wenn das gemeinsame Gebilde stets nur aus einem Stücke bestände.

1. Satz. *Sei $\mathfrak{g}$ ein Gebilde ϱ-ter Stufe, an welchem die sämtlichen l Funktionen* (A), § 25, *verschwinden, und sei $s = n - \varrho$. Ist nun*

$$s < l,$$

so verschwindet jede $(s+1)$-reihige Determinante aus der Matrix $\mathfrak{M}$, § 25, *in jedem Punkte von $\mathfrak{g}$.*

Wäre der Satz nicht richtig, so sei etwa

$$J = \frac{\partial(G_1, \ldots, G_{s+1})}{\partial(z_\varrho, \ldots, z_n)}$$

in einem Punkte von $\mathfrak{g}$ von null verschieden. Dann bestimmen

schon die ersten $\sigma + 1$ Gleichungen $G_k = 0$ ein Gebilde von der Stufe $n - (s + 1) = \varrho - 1$, was zu einem Widerspruch führt.

2. Satz. *Sei $\mathfrak{g}$ ein Gebilde ϱ-ter Stufe, an welchem die sämtlichen l Funktionen* (A), § 25, *verschwinden, und sei $s = n - \varrho$. Dann kann jede s-reihige Determinante aus der Matrix $\mathfrak{M}$,* § 25, *in jedem Punkte von $\mathfrak{g}$ verschwinden.*

Zum Beweise dieses Satzes diene folgendes Beispiel.

(3) $$G_1 = z_1^3 z_2^2 + z_3^2, \qquad G_2 = z_1^3 z_2^2 - z_3^2.$$

Dabei bestehe $\mathfrak{g}$ aus dem Gebilde

(4) $$z_2 = 0, \qquad z_3 = 0.$$

Hier ist also $n = 3$, $\varrho = 1$, $s = 2$, und alle 2-reihigen Determinanten aus $\mathfrak{M}$ verschwinden in jedem Punkte von $\mathfrak{g}$. Damit ist der Beweis geliefert.

Mit diesem Beispiele ist noch eine andere Frage erledigt.

3. Satz. *Während das Gleichungssystem des* 1. *Satzes von* § 19 *niemals eine im Punkte $(x) = (a)$ analytische Umkehrung zulassen kann, falls J im Punkte $(u) = (b)$ verschwindet, kann andererseits das Gleichungssystem* (A) *des zweiten Weierstraßschen Satzes,* § 17, $l \geqq 2$, *wohl eine Auflösung gestatten:*

(5) $$z_k = \varphi_k(z_1, \ldots, z_\varrho), \qquad k = \varrho + 1, \ldots, n,$$

wobei φ_k sich im Punkte $(a_1, \ldots, a_\varrho)$ analytisch verhält und dort den Wert a_k annimmt; wo fernerhin diese Auflösung des ganzen Funktionensystems bereits von den ersten $n - \varrho = s$ Gleichungen des Systems $G_1 = 0, \ldots, G_s = 0$ geliefert wird; und wo endlich die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(G_1, \ldots, G_s)}{\partial(z_{\varrho+1}, \ldots, z_n)}$$

in jedem Punkte des Gebildes (5) *verschwindet. Dabei können insbesondere sämtliche Funktionen G_k irreduktibel sein.*

Im übrigen gilt der entsprechende Satz im Falle $l = 1$ nicht. Ist nämlich $G(w, z)$ im Anfang irreduktibel, und ist

(4) $$w = \varphi(z)$$

eine im Anfang analytische, dort verschwindende Funktion,

welche, in $G(w, z)$ eingetragen, diese Funktion identisch zum Verschwinden bringt, so kann

$$G_w(w, z)$$

nicht in jedem Punkte des Gebildes (4) verschwinden.

In der Tat läßt sich $G(w, z)$ nach der Verallgemeinerung des Vorbereitungssatzes, § 2, zunächst in der Form darstellen:

$$G(w, z) = z^k \Gamma(w, z) \Omega(w, z),$$

wobei $\Gamma(w, z)$ ein im Anfange irreduktibles ausgezeichnetes Pseudopolynom ist resp. sich auf den Faktor 1 reduziert, und $\Omega(w, z)$ sich im Anfange analytisch verhält und dort nicht verschwindet. Da nun G irreduktibel ist und durch die Funktion (4) zum Verschwinden gebracht wird, so muß Γ wirklich von w abhängen, und darum muß notwendig $k = 0$ sein.

Hiernach muß

$$G_w = \Gamma_w \Omega + \Gamma \Omega_w$$

sein. Würden nun G und G_w beide längs (4) verschwinden, so müßten auch Γ und Γ_w dort verschwinden, woraus denn folgt, daß Γ zerfällt. Mithin müßte G ebenfalls reduktibel sein, was zu einem Widerspruch führt.

§ 27. Über die Definition eines monogenen analytischen Gebildes m-ter Stufe im Raume von $n = m + r$ Veränderlichen.

Wir haben bereits in Kap. 1, § 24 den Begriff sowohl einer monogenen analytischen Funktion als auch eines monogenen analytischen Funktionensystems besprochen. Es handelt sich hier um die Aufnahme gewisser Grenzpunkte, ähnlich wie beim Übergang von der analytischen Funktion zum analytischen Gebilde im Falle $n = 1$ (I, 9, § 3).

Wir wollen ein *Element* eines monogenen analytischen Gebildes m-ter Stufe im Raume der $n = m + r$ Veränderlichen, wie folgt, definieren.[1]) Vorgelegt sei eine beliebige irreduktible ausge-

1) Weierstraß, *Werke* III, S. 100. Sofern die nachstehende Transformation (2) den Punkt $(w) = (0)$ in einen endlichen Punkt $(z) = (a)$ überführt, deckt sich der Begriff des Elements genau mit dem des Gebildes $\mathfrak{g}$ m-ter Stufe im Raume der n Veränderlichen, § 17. In diesem Paragraphen wird indessen noch der Fall zugelassen, daß (a) im Unendlichen liegt. Dabei spricht Weierstraß zwar nur vom Raume der Funktionentheorie, und dieser Raum wird wohl auch für gewöhnlich vorzuziehen sein. Prinzipiell steht aber doch nichts im Wege, wenn man andere Räume in Betracht ziehen will.

zeichnete pseudoalgebraische Gleichung

$$(1)\qquad w_{m+1}^{\mu} + E_1 w_{m+1}^{\mu-1} + \cdots + E_\mu = 0\,, \qquad E_j = E_j(w_1, \ldots, w_m)\,,$$

deren Spitze im Anfang liegt. Sei w_{m+k}, $k=2,\ldots,r=n-m$, eine am Gebilde (1) eindeutige stetige analytische Funktion. Setzt man nun

$$(2)\qquad z_i - a_i = w_i\,, \qquad i=1,\ldots,n,$$

und beschränkt man dabei den Punkt $(w_1, \ldots, w_m)$ auf eine Umgebung des Anfangs, in welcher sich jeder der Koeffizienten E_j analytisch verhält und die Funktionen w_{m+k} stetig bleiben, so bildet der Inbegriff der also erhaltenen Punkte (z) das in Aussicht genommene Element.

Liegt der Punkt (a) im unendlich fernen Bereiche, so wird man in den Formeln (2) $\frac{1}{z_i}$ an Stelle von $z_i - a_i$ treten lassen, falls es sich um den Raum der Analysis handelt und $a_i = \infty$ ist. Bei den anderen Räumen wird man die entsprechende Transformation machen.

Insbesondere kann $r = 1$ sein, wobei also die Funktionen w_{m+k}, $k=2,\ldots$, alle fortfallen. Andererseits kann $\mu = 1$ sein. Dann verhalten sich alle Funktionen w_{m+k}, $k=1,\ldots,r$, analytisch im Anfang.

Nach W e i e r s t r a ß wird das Element mit

$$\mathfrak{G}\,[z_1, \ldots, z_n \mid a_1, \ldots, a_n]_m$$

bezeichnet.

Hierüber ist noch folgendes zu bemerken. Da jede der Funktionen w_{m+k} nach § 12 einer Gleichung von derselben Beschaffenheit wie (1), doch möglicherweise von niederem Grade $\mu' < \mu$, genügt, so erkennt man, daß die Punkte eines Elements einem Gleichungssysteme von der Form (A) im zweiten Weierstraßschen Satze, § 17, genügen. Sei umgekehrt $G_k(z_1, \ldots, z_n)$, $k=1,\ldots,l$, im (endlichen oder unendlichen) Punkte $(z) = (a)$ analytisch und verschwinde dort, ohne jedoch identisch zu verschwinden. Übt man nötigenfalls eine nicht-spezialisierte lineare Transformation auf die (z) aus, so definieren die also transformierten simultanen Gleichungen

$$G_k(z_1, \ldots, z_n) = 0\,, \qquad k=1,\ldots,l,$$

sofern sie noch eine zweite in der Nähe von (a) gelegene gemein-

same Nullstelle (a') zulassen, ein oder mehrere Elemente monogener analytischer Gebilde, möglicherweise verschiedener Stufe, im Raume der n Veränderlichen. Demgemäß wollen wir die Definition eines Elements dahin erweitern, daß auch das ursprüngliche Gleichungssystem ein Element definieren soll.

Sind zwei Elemente

$$\mathfrak{G}[z_1, \ldots, z_n \mid a_1, \ldots, a_n]_m, \qquad \mathfrak{G}^{(1)}[z_1, \ldots, z_n \mid b_1, \ldots, b_n]_m$$

vorgelegt, welche so beschaffen sind, daß in einer gewissen Umgebung eines Punktes $(z) = (c)$ jede Stelle des einen Elements auch dem anderen angehört, so *fallen* diese Elemente *in der Umgebung von* (c) *zusammen*[1]), und das eine bildet dann eine *Fortsetzung* des anderen.

Zwei beliebige Elemente

$$\mathfrak{G}^{(0)}[z_1, \ldots, z_n \mid a_1, \ldots, a_n]_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^{(\varrho)}[z_1, \ldots, z_n \mid a_1^{(\varrho)}, \ldots, a_n^{(\varrho)}]_m$$

heißen *Fortsetzungen* voneinander, wenn es möglich ist, eine Reihe von Elementen $\mathfrak{G}^{(k)}[z_1, \ldots, z_n \mid a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}]_m$, $k=1, \ldots, \varrho-1$, so einzuschalten, daß je zwei aufeinanderfolgende Elemente Fortsetzungen voneinander im vorhin erklärten Sinne sind. Dann ist jedes dieser Elemente eine Fortsetzung jedes anderen.

Die Gesamtheit der Punkte (z), welche ein erstes Element und dessen verschiedene Fortsetzungen liefern, macht nun das *monogene analytische Gebilde m-ter Stufe im Raume der Variabelen* $(z_1, \ldots, z_n)$ aus. Wie im Falle der monogenen analytischen Funktionen und Funktionensysteme, so kann man auch hier das ganze Gebilde vermöge einer abzählbaren Menge von Elementen vollständig darstellen.

Satz. *Sei*

$$(3) \qquad u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0, \qquad A_j = A_j(v_1, \ldots, v_m),$$

eine irreduktible ausgezeichnete pseudoalgebraische Gleichung, deren Spitze im Anfange $(v_1, \ldots, v_m) = (0, \ldots, 0)$ *liegt, und sei* v_{m+k}, $k=1, \ldots, n-m$, *eine am Gebilde* (3) *eindeutige stetige analytische Funktion. Setzt man nun*

$$(4) \qquad z_i - a_i = v_i, \qquad i=1, \ldots, n,$$

und beschränkt man dabei den Punkt $(v_1, \ldots, v_m)$ *auf eine Umgebung des Anfangs, in welcher jeder der Koeffizienten* A_k *sich analy-*

1) Nach Weierstraß *koinzidieren* sie; a. a. O. S. 101.

tisch verhält und $v_{m+1}, \ldots, v_n$ *stetig bleiben, so bildet der Inbegriff der also erhaltenen Punkte* (z) *ein Element.*

Bezüglich unendlich ferner Punkte wird noch eine ähnliche Festsetzung wie vorhin getroffen.

Dieser Fall ist insofern allgemeiner als die Definition, daß keine der Funktionen v_{m+k} zum Gebilde (3) zu gehören braucht.

Wir bilden die Funktion

$$v = c_1 v_{m+1} + \cdots + c_{n-m} v_n, \tag{5}$$

wobei die c_i unbestimmte Konstanten bedeuten. Dann ist v eindeutig, stetig und analytisch am Gebilde (3). Wir wählen nun die c_i so, daß v, als mehrdeutige Funktion von $(v_1, \ldots, v_m)$ betrachtet, möglichst vieldeutig wird. Sei μ der Grad dieser Vieldeutigkeit. Dann kann μ sowohl $= \nu$ als auch $< \nu$ ausfallen.

Nach dem 2. Satze von § 12 wird v einer irreduktiblen ausgezeichneten pseudoalgebraischen Gleichung

$$v^\mu + E_1 v^{\mu-1} + \cdots + E_\mu = 0, \qquad E_j = E_j(v_1, \ldots, v_m), \tag{6}$$

mit der Spitze im Anfange, $(v_1, \ldots, v_m) = (0, \ldots, 0)$, genügen. An diesem Gebilde wird dann jede der Funktionen (4) eindeutig, stetig und analytisch sein. Unterwirft man die $v_1, \ldots, v_n$ einer nicht-singulären linearen Transformation, wodurch $v_1, \ldots, v_m$ resp. in sich übergehen, dagegen die durch die Gleichung (5) bestimmte Variabele v als eine der weiteren Variabelen auftritt, so genügen die neuen Variabelen der an die Spitze gestellten Definition eines Elements. Hiermit ist nun der Beweis fertig.

Es liegt der Gedanke nahe, eine Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes darin zu suchen, daß man irgendwelche n Funktionen z_k, $k = 1, \ldots, n$, nimmt, welche nur am Gebilde (3) eindeutig, stetig und im allgemeinen analytisch sind. Diese Verallgemeinerung trifft aber selbst im Falle $\nu = 1$ nicht zu, wie aus den Entwicklungen des nächsten Paragraphen hervorgeht.

§ 28. Über die Parameterdarstellung eines Elements.

In der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle (a) läßt ein Element folgende Parameterdarstellung zu:

$$z_k = \varphi_k(t_1, \ldots, t_m), \qquad k = 1, \ldots, n, \quad 1 \leqq m \leqq n-1, \tag{1}$$

wobei φ_k sich im Anfange analytisch verhält und außerdem einem

beliebigen Punkte (z) der Umgebung von (a) nur ein einziger Punkt (t) der Umgebung des Anfangs entspricht. In der Tat kann man ja die t_i beziehungsweise gleich m passend gewählten z_j setzen.

Es fragt sich nun, wann umgekehrt die Gleichungen (1) ein Element darstellen. Vor allem ist klar, daß dies stets der Fall sein wird, wenn mindestens eine m-reihige Determinante aus der Matrix

$$(2)\qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{matrix} \right\|$$

im Anfange nicht verschwindet. Verschwindet dagegen jede derartige Determinante im Anfange, so sind ja zwei Fälle möglich: a) die Gleichungen

$$(3)\qquad \varphi_k(t_1, \ldots, t_m) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

lassen keine zweite simultane Lösung in der Nähe des Anfangs zu; b) es gibt mindestens einen zweiten Punkt (t) in der Umgebung des Anfangs, in welchem diese Gleichungen alle befriedigt sind.

Den Fall b) dürfen wir ausschließen, da wir doch wenigstens verlangen wollen, daß einer Stelle (z) des Elements höchstens eine endliche Anzahl von Parameterpunkten (t) entsprechen mögen. Insbesondere werden also der Stelle $(z) = (a)$ isolierte Punkte (t) zugeordnet, und daher braucht man nur die Umgebung des Anfangs $(t) = 0$ geeignet zu wählen, damit bloß einer dieser Punkte, nämlich der Anfang selbst, in diesem Bereiche enthalten wird.

Der nicht-spezialisierte Fall unter a) wird nun der sein, daß es m Funktionen φ_k gibt, welche keinen zweiten Nullpunkt in der Nähe des Anfangs besitzen. Diese seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Dann lehrt der 2. Satz von § 19, daß einer der Parameter, etwa t_m (nach eventueller Ausübung einer linearen Transformation der t_k), einer irreduktiblen ausgezeichneten pseudoalgebraischen Gleichung

$$(4)\qquad t_m^\mu + E_1 t_m^{\mu-1} + \cdots + E_\mu = 0, \qquad E_\lambda = E_\lambda(z_1, \ldots, z_m)$$

genügt, sowie daß die übrigen t_k eindeutig und stetig und in den regulären Punkten des Gebildes (4) analytisch sind. Daher erweisen sich die weiteren Koordinaten $z_{m+1}, \ldots, z_n$ als eindeutig und stetig und im allgemeinen analytisch am Gebilde (4), und mit-

hin bildet die Gesamtheit dieser Punkte nach dem Satze von § 27 ein Element.

Es kann indessen vorkommen, daß keine solche Wahl der φ_k möglich ist, wie das Beispiel zeigt:

$$z_1 = t_1 t_2, \qquad z_2 = t_1(t_1 + t_2), \qquad z_3 = t_2(t_1 + t_2).$$

Dann kann man aber durch eine geeignete lineare Transformation:

$$(5) \qquad \Phi_k = c_{k1}\varphi_1 + \cdots + c_{kn}\varphi_n, \qquad k=1,\ldots,n,$$

neue Φ_k einführen, welche die gewünschte Eigenschaft haben. In der Tat sei φ_1 eine der Funktionen φ_k, welche nicht identisch verschwindet. Dann wird durch die Gleichung

$$\varphi_1(t_1, \ldots, t_m) = 0$$

ein oder mehrere Gebilde $(m-1)$-ter Stufe,

$$\mathfrak{g}'_{m-1}, \quad \mathfrak{g}''_{m-1}, \ldots,$$

definiert. An jedem derselben, $\mathfrak{g}^k_{m-1}$, gibt es eine Stelle (τ^k_{m-1}), wo wenigstens eine der weiteren Funktionen $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nicht verschwindet. Setzen wir nun

$$\Phi_1 = \varphi_1,$$
$$\Phi_2 = \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n,$$

so lassen sich die Koeffizienten λ_j so wählen, daß Φ_2 an keiner der Stellen (τ^k_{m-1}) verschwindet. Daraus ergibt sich, daß keins der Gebilde $\mathfrak{g}^k_{m-1}$ auf dem Gebilde $\Phi_2 = 0$ liegen kann, und darum bestimmen die beiden Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0$$

eine Reihe von Gebilden, je von der $(m-2)$-ten Stufe,

$$\mathfrak{g}'_{m-2}, \quad \mathfrak{g}''_{m-2}, \ldots.$$

Jetzt verfahre man mit diesen Gebilden geradeso. Es muß nämlich eine Stelle (τ^k_{m-2}) am Gebilde $\mathfrak{g}^k_{m-2}$ geben, wo wenigstens eine der Funktionen $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nicht verschwindet. Bildet man nun die Funktion

$$\Phi_3 = \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_n\varphi_n,$$

so lassen sich die Koeffizienten μ_j so bestimmen, daß Φ_3 an keiner

der Stellen (τ_{m-2}^k) verschwindet. Mithin wird durch die Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0$$

eine Reihe von Gebilden, je von der $(m-3)$-ten Stufe definiert.

So erhält man denn schließlich m Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, welche linear von den n φ_k abhängen,

$$\Phi_k = c_{k1}\varphi_1 + \cdots + c_{kn}\varphi_n, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

und nur im Anfange gleichzeitig verschwinden. Nun muß aber der Rang der Matrix der Koeffizienten gleich m sein, denn sonst wären ja die $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ linear verknüpft, und darum ließen die m Gleichungen $\Phi_k = 0, k = 1, \ldots, m$, noch andere Lösungen in der Nähe des Anfangs zu. Mithin kann man auf mannigfache Weise die in Aussicht genommene lineare Transformation herstellen.

In dem besonderen Falle, daß eine willkürliche Stelle (z) des Elements nur zu einem einzigen Punkte (t) führt, muß mindestens eine m-reihige Determinante aus der Matrix (2) im Anfange von null verschieden sein. Bildet man nämlich die Gleichung (4) für die transformierten Φ_k,

$$Z_k = \Phi_k(t_1, \ldots, t_m), \qquad k = 1, \ldots, m,$$

so wird der Wert von μ gleich 1 sein. Daraus ergibt sich also eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den $(t_1, \ldots, t_m)$ und den $(Z, \ldots, Z_m)$. Aus dem 6. Satze von § 20 geht dann hervor, daß die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}$$

im Anfang nicht verschwindet. Aus elementaren Determinantengesetzen folgt nun weiter, daß mindestens eine m-reihige Determinante aus der Matrix (2) im Anfange von null verschieden sein muß.

Das Resultat läßt sich in folgenden Satz zusammenfassen.

Satz. *Damit die Gleichungen* (1) *ein Element vorstellen, derart, daß jedem Punkte* (z) *höchstens eine feste Anzahl* μ *von Punkten* (t) *entsprechen, ist notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem* (3) *nur die eine Lösung* $(t) = (0)$ *zulasse.*

Soll fernerhin $\mu = 1$ *sein, so ist notwendig und hinreichend, daß mindestens eine* m*-reihige Determinante aus der Matrix* (2) *im Anfange nicht verschwinde.*

§ 29. Fortsetzung. Von den Grenzstellen eines Gebildes.

Weierstraß[1]) bringt noch ein anderes Ausgangsgebilde zur Sprache, welches jedoch nicht stets aus einem Element besteht. Anstatt nämlich die z_i linear von den w_i abhängen zu lassen, kann man auch direkt die z_i, $i=1,\ldots,n$, als eindeutige analytische Funktionen am Gebilde (1), § 27 annehmen. Die Gesamtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte (z) bildet nach Weierstraß einen *Zweig*[2]) eines Gebildes m-ter Stufe. Die weiteren Definitionen (*zusammenfallen, Fortsetzung* usw.) werden dann ähnlich wie im vorhergehenden Falle getroffen.

Nach dieser Definition ist zwar jedes Element ein Zweig, es ist aber nicht umgekehrt jeder Zweig ein Element, wie das Beispiel von § 22 zeigt:

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = uve^v. \tag{1}$$

Hier existiert eben keine im Anfange analytische Funktion $\Omega(x, y, z)$, welche, gleich 0 gesetzt, das Gebilde (1) in der Nähe des Anfangs darstellt. — In der Folge werden wir uns nur der ersten Definition bedienen.

Wie man sieht, handelt es sich hier im wesentlichen darum, welche Grenzstellen man einer monogenen analytischen Funktion bzw. einem solchen Funktionensysteme adjungieren muß, um daraus ein geeignet definiertes monogenes analytisches Gebilde zu gewinnen. Die Antwort darauf haben wir bereits im voraufgehenden Paragraphen gegeben. Demnach wird im Falle des soeben zitierten Beispiels der Anfang, obwohl dieser Punkt zu dem durch die Gleichungen (1) definierten Zweige gehört, doch nicht zum monogenen analytischen Gebilde bzw. zu demjenigen Teile davon, welcher durch die Gleichungen (1) dargestellt wird, zu rechnen sein. Denn damit ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ zum Gebilde gerechnet werde, ist ja notwendig und hinreichend, daß es ein Gleichungssystem (A), § 17, gibt, welches durch die Koordinaten der Punkte seiner Umgebung befriedigt wird.[3])

Zur Beleuchtung dieser Definition möge noch folgendes Beispiel angeführt werden. Sei

$$w = f(z)$$

---

1) a. a. O. S. 103.

2) Es ist indessen nicht wünschenswert, diese Bezeichnung aufzunehmen, da nämlich die für die Funktionentheorie nützliche Auffassung eines Zweiges eine andere ist; vgl. I, 9, § 3.

3) Weierstraß a. a. O. S. 96.

ein überall endliches Abelsches Integral, welches drei ganzzahlig unabhängige Periodizitätsmoduln P_1, P_2, P_3 aufweist, d. h. es gibt keine Relation von der Form

$$m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 = 0, \tag{2}$$

wobei m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen sind und nicht sämtlich verschwinden. Dann läßt sich zeigen[1]), daß es drei ganze Zahlen m_1, m_2, m_3 gibt, derart, daß der auf der linken Seite von (2) stehende Ausdruck einer beliebig vorgegebenen komplexen Zahl beliebig nahe kommt. Demgemäß liegen Punkte (w, z), wobei w eine geeignete Bestimmung der Funktion $f(z)$ bedeutet, in jeder Umgebung eines willkürlichen Punktes (b, a).

Hieraus erkennt man, daß es keinen Sinn haben würde, einer monogenen analytischen Funktion schlechtweg alle Grenzstellen zu adjungieren.

Bedeutung des Beispiels von § 2. Ist $w = f(z)$ eine analytische Funktion eines einzigen Arguments, welches sich nicht gerade auf eine Konstante reduziert, und ist $z = a$ entweder ein gewöhnlicher Punkt oder höchstens ein Verzweigungspunkt endlicher Ordnung oder ein Pol, so daß also der Punkt $z = a$, $w = b = f(a)$ dem monogenen analytischen Gebilde angehört, so wird die inverse Funktion, $z = \varphi(w)$, im Punkte $w = b$ entweder analytisch sein oder dort höchstens eine Singularität der soeben bezeichneten Art aufweisen.

Im Falle einer Funktion mehrerer Argumente hat dieser Sachverhalt nicht mehr statt. Das genannte Beispiel (S. 90) liefert uns eine Funktion

$$y = f(x, z) = x R(z),$$

welche sich im Anfang, $(x, z) = (0, 0)$, sogar noch analytisch verhält. Löst man die Gleichung nach z auf:

$$z = \varphi(x, y) = Q\left(\frac{y}{x}\right),$$

so hat man das, was im Falle zweier Variabelen gewissermaßen der inversen Funktion entspricht. Und doch weist diese eine Singularität auf, welche nicht mehr *algebraischen Charakters*

---

1) Clebsch u. Gordan, *Abelsche Funktionen*, S. 134, wo indessen der Satz, worum es sich hier handelt, ungenau ausgesprochen ist.

(Weierstraß) ist. d. h. z ist nicht Wurzel einer pseudoalgebraischen Gleichung,

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

wobei A_k sich im Punkte $(x, y) = (0, 0)$ analytisch verhält.

Geometrische Deutung des genannten Beispiels. Der Sachverhalt kann auch geometrisch beleuchtet werden. Betrachten wir zuerst die Funktion

$$z = \frac{y}{x}.$$

In der Umgebung des Anfangs, mit der alleinigen Ausnahme der Punkte $x = 0$, verhält sich diese Funktion analytisch. Deuten wir uns dieselbe als eine Fläche im komplexen drei-dimensionalen Raume, so erstreckt sich dieselbe ins Unendliche. In der Tat ist sie eben eine Regelfläche,

$$y = xz,$$

welche dadurch entsteht, daß eine die z-Achse schneidende Gerade sich um diese Achse dreht und dabei der (x, y)-Ebene stets parallel bleibt, während sie sich hebt oder senkt. Im übrigen wird diese Gerade jeder beliebigen Geraden der (x, y)-Ebene mit Ausnahme der Geraden $x =$ konst. parallel. Dazu ist aber nötig, daß sie über unbeschränkten Spielraum in bezug auf Steigen und Fallen verfügt.

Fassen wir andererseits die Funktion

$$z = Q\left(\frac{y}{x}\right)$$

als Fläche auf. Dieselbe ist sogar auch eine Regelfläche von genau demselben Charakter:

$$y = xR(z),$$

nur mit dem einen Unterschied — und dies ist eben die crux der ganzen Sache —, daß dem Steigen und Senken der erzeugenden Geraden hier Grenzen gesteckt sind.

Trotzdem besteht soviel von der Fläche, wie in der Umgebung des Anfangs liegt, in beiden Fällen aus einem regulären Stücke, welches sich über der (x, z)-Ebene singularitätenfrei ausbreitet.

Drittes Kapitel.

Singuläre Stellen und analytische Fortsetzung. Rationale Funktionen.

§ 1. Außerwesentliche singuläre Stellen.

Seien $G(z_1, \ldots, z_n)$ und $H(z_1, \ldots, z_n)$ zwei Funktionen, welche sich beide im Punkte $(z) = (a)$ analytisch verhalten, und wovon keine identisch verschwindet. Verschwindet dann H im Punkte (a), während G und H keinen gemeinsamen Teiler im Punkte (a) haben, vgl. Kap. 2, § 4, so wird durch den Quotienten $\frac{G}{H}$ eine Funktion F dargestellt:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{H(z_1, \ldots, z_n)},$$

welche im Punkte $(z) = (a)$ eine *außerwesentliche singuläre Stelle*[1]) besitzt. Und allgemein hat jede Funktion F, welche einer derartigen Darstellung fähig ist, im Punkte (a) eine solche Singularität. Auf Punkte des unendlich fernen Bereiches wird die Definition in der üblichen Weise übertragen.

Damit eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(z) = (a)$ eine außerwesentliche singuläre Stelle aufweise, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Funktion sich in einem $2n$-dimensionalen Teile σ_1 einer bestimmten Umgebung σ des Punktes (a) analytisch verhält und dort nicht identisch verschwindet; daß es fernerhin eine in σ analytische, im Punkte (a) verschwindende, aber in σ nicht identisch verschwindende Funktion $H(z_1, \ldots, z_n)$ gibt, derart, daß das zunächst im Bereiche σ_1 betrachtete Produkt HF eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich σ hin gestatte:

$$H(z_1, \ldots, z_n) F(z_1, \ldots, z_n) = G(z_1, \ldots, z_n);$$

1) Weierstraß, *Funktionenlehre*, S. 130 = *Werke*, Bd. 2, S. 156.

und daß endlich G und H keinen gemeinsamen Teiler im Punkte (a) zulassen.

Von den zwei Klassen außerwesentlicher singulärer Stellen. Die außerwesentlichen singulären Stellen lassen sich in zwei Klassen einteilen:

i) Ist der Zähler G im Punkte (a) von null verschieden, so wird F unendlich, wenn der Punkt (z) sich dem Punkte (a) nähert. Ausführlicher gesagt, entspricht einer beliebig großen positiven Zahl M eine zweite positive Zahl δ derart, daß

$$|F(z_1, \ldots, z_n| > M$$

bleibt, sobald (z) ein Punkt des Bereiches

$$|z_i - a_i| < \delta, \qquad i=1,\ldots,n,$$

ist, wofür nur $H(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ ist.

Eine solche Stelle ist das Analogon eines Poles im Falle der Funktionen einer Variabelen, und möge eine außerwesentliche singuläre Stelle *erster Art* oder ein *Pol* heißen. Durch die Gleichung

$$H(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

wird, in der Nähe von (a), ein aus einem oder mehreren Stücken bestehendes $(2n-2)$-fach ausgedehntes Gebilde $\mathfrak{G}$ definiert. Jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ ist auch ein Pol von F. Mithin treten die Pole einer analytischen Funktion von $n > 1$ Veränderlichen niemals isoliert auf, sondern sie erfüllen eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte analytische Mannigfaltigkeit.

ii) Verschwindet dagegen $G(z_1, \ldots, z_n)$ ebenfalls im Punkte (a), so heißt (a) eine außerwesentliche singuläre Stelle *zweiter Art*. In der Umgebung einer solchen Stelle nimmt F einen beliebig vorgeschriebenen Wert C in den Punkten eines aus einem oder mehreren Stücken bestehenden $(2n-2)$-fach ausgedehnten Gebildes $\mathfrak{G}'$ an, und zwar wird $\mathfrak{G}'$ durch die Relationen

$$G(z_1, \ldots, z_n) - CH(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad H(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$$

bestimmt. Nach dieser Seite hin hat daher eine solche Singularität Ähnlichkeit mit einer wesentlichen singulären Stelle einer Funktion einer Variabelen.

In der Umgebung einer außerwesentlichen singulären Stelle zweiter Art, $(z) = (a)$, liegen ebenfalls Pole, welche denn ein

$(2n-2)$-fach ausgedehntes Gebiet erfüllen, und zwar werden dieselben durch die Relationen

$$H(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad G(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$$

bestimmt. M. a. W. muß man aus dem aus einem oder mehreren Stücken bestehenden $(2n-2)$-fach ausgedehnten Gebilde $H(z_1, \ldots, z_n) = 0$ noch die Schnittpunkte mit dem Gebilde $G(z_1, \ldots, z_n) = 0$ fortheben.

Die soeben ausgenommenen Schnittpunkte:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad H(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

erfüllen, sobald $n \geqq 3$ ist, ein aus einem oder mehreren Stücken bestehendes $(2n-4)$-fach ausgedehntes Gebilde und liefern sämtlich außerwesentliche singuläre Stellen zweiter Art. Die in einer bestimmten Hyperkugel

$$|z_1 - a_1|^2 + \cdots + |z_n - a_n|^2 \leqq h^2$$

gelegenen Punkte dieser Gattung bilden eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit. Für die Pole trifft dies im vorliegenden Falle nicht mehr zu.

Ist dagegen $n = 2$, so treten die außerwesentlichen singulären Stellen zweiter Art isoliert auf. Die übrigen singulären Punkte der Nachbarschaft einer solchen Stelle sind sämtlich Pole.

Hat die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) einen Pol, so hat die Funktion

$$\frac{\alpha F + \beta}{\gamma F + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \qquad \gamma \neq 0,$$

in der Nähe von (a) nur hebbare Unstetigkeiten, in denen sie sich stets dem Werte $\frac{\alpha}{\gamma}$ nähert.

Hat F dagegen eine außerwesentliche singuläre Stelle zweiter Art in (a), so hat jede Funktion

$$\frac{\alpha F + \beta}{\gamma F + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

ebenfalls eine außerwesentliche singuläre Stelle zweiter Art in (a). M. a. W. bleibt die $(2n-4)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der außerwesentlichen singulären Stellen zweiter Art gegenüber der genannten linearen Transformation erhalten, während das entsprechende bei den Polen nicht zutrifft, sofern $\gamma \neq 0$ ist.

Im übrigen bleiben die außerwesentlichen singulären Stellen nebst der soeben besprochenen Einteilung derselben offenbar in-

variant gegenüber einer beliebigen Transformation von der Art

(1) $$z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei f_i sich im Punkte $(z) = (a)$ analytisch verhält und

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \neq 0.$$

Definition. Eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ heißt *meromorph in einem Punkte* (a), wenn sie sich dort analytisch verhält oder höchstens eine außerwesentliche singuläre Stelle dort aufweist. Sie heißt *meromorph in einem Bereiche* T, wenn sie im allgemeinen eindeutig erklärt und analytisch in T ist und keine anderen singulären Stellen im Inneren von T als nur außerwesentliche besitzt. Insbesondere kann sie im ganzen Bereiche T analytisch sein.

Verhält sich F meromorph in T und ist F keine Konstante, so ist auch die Funktion

$$\frac{\alpha F + \beta}{\gamma F + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

meromorph in T. Wird andererseits T vermöge einer Transformation (1) auf einen Bereich T' bezogen, so wird die transformierte Funktion F' ebenfalls meromorph in T' sein.

Die Definitionen dieses Paragraphen werden in der üblichen Weise auf die Punkte des unendlich fernen Bereiches übertragen, und die Sätze bestehen dann unverändert.

§ 2. Fortsetzung. Hinreichende Bedingungen.[1]

Satz. *Damit eine Funktion* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *in einem Punkte* $(z) = (a)$ *eine außerwesentliche singuläre Stelle habe, reicht folgende Bedingung hin.*

---

1) Der nachstehende Satz enthält meines Wissens die erste hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion mehrerer Variabelen eine außerwesentliche singuläre Stelle in einem gegebenen Punkte besitze, sofern man von jenem Satze von § 1 absieht, welcher eigentlich kaum mehr als eine ersichtliche Umstellung der Definition ist. Auf Grund der späteren Entwicklungen dieses Kapitels läßt er verschiedene Verallgemeinerungen zu. Trotzdem schien es wünschenswert, ihn gleich an die Spitze zu stellen, denn er enthält ja den Kern der weiteren Sätze. Auch der Beweis ist meistenteils schon in den Entwicklungen von Kap. 2 enthalten. Was von den späteren Entwicklungen dieses Kapitels noch dazu nötig ist, findet sich gleich in den Hauptsätzen von §§ 4, 5.

Bei einem ersten Studium dieses Kapitels kann der Leser diesen Paragraphen überschlagen.

a) *Sei* $H(z_1, \ldots, z_n)$ *eine im Punkte* (a) *analytische, dort verschwindende, aber nicht identisch verschwindende Funktion. Dann soll* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *in jedem Punkte einer bestimmten Umgebung von* (a)

$$\Sigma: \qquad |z_i - a_i| < h, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

in welchem H *nicht verschwindet, eindeutig erklärt sein und sich analytisch verhalten.*

b) *In den in* Σ *gelegenen Nullstellen von* H *soll* F *im allgemeinen unendlich werden. Dabei sollen nur solche der genannten Punkte ausgenommen werden, in welchen eine zweite Funktion* $G(z_1, \ldots, z_n)$ *von derselben Beschaffenheit wie* H, *aber teilerfremd zu* H, *auch zugleich verschwindet.*

Die Bedingung ist auch notwendig.

Es mögen die irreduktiblen Faktoren von H mit $H_1, \ldots, H_\mu$ bezeichnet werden. Indem wir eine nicht-spezialisierte Wahl des Koordinatensystems zugrunde legen und übrigens $a_n = 0$ setzen, lassen sich die H_i unbeschadet der Allgemeinheit als ausgezeichnete Pseudopolynome in $z_n = u$ annehmen. Dann wird insbesondere ein Teil der Nullstellen der Funktion H durch die irreduktible ausgezeichnete pseudoalgebraische Gleichung gegeben:

$$(1) \qquad H_1(z_1, \ldots, z_n) \equiv u^m + A_1 u^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

wobei sich also A_k im Punkte $(z_1, \ldots, z_{n-1}) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ analytisch verhält und dort verschwindet. Ähnliches gilt auch für $G(z_1, \ldots, z_n)$.

Aus der dem Gebilde (1) entsprechenden Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ mögen zunächst alle Punkte fortgehoben werden, in welchen die Diskriminante von (1) verschwindet. Sodann fasse man noch die Punkte von $\mathfrak{F}$ ins Auge, in welchen G sowie die übrigen Faktoren $H_2, \ldots, H_\mu$ verschwinden. Ist $(z_1', \ldots, z_{n-1}', u')$ ein solcher Punkt, so mögen alle m Punkte aus $\mathfrak{F}$ entfernt werden, wofür

$$z_i = z_i', \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

ist. Was nun von $\mathfrak{F}$ noch übrig bleibt, werde mit $\mathfrak{F}'$ bezeichnet.

Wie man sieht, entsteht $\mathfrak{F}'$ aus $\mathfrak{F}$ dadurch, daß man alle Punkte aus $\mathfrak{F}$ forthebt, a) in denen die Diskriminante von H_1 verschwindet; b) in denen die Resultante von H_1 und $GH_2 \ldots H_\mu$ verschwindet.

Sei $(a_1', \ldots, a_n') = (a')$ ein Punkt von $\mathfrak{F}'$. Dann hat F einen Pol in (a'), und daher hat die Funktion $\frac{1}{F}$ in der Nähe von (a') nur hebbare Unstetigkeiten. Ergänzt man dieselbe dort durch ihren Grenzwert 0, so werde die also vervollständigte Funktion mit F' bezeichnet.

Andererseits ist die Funktion $H_1(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a') irreduktibel. Denn es ist ja

$$H_1(z_1, \ldots, z_n) = (u - P)\, \Omega(z_1, \ldots, z_n),$$

wo $P(z_1, \ldots, z_{n-1})$ sich analytisch im Punkte $(a_1', \ldots, a_{n-1}')$ verhält und dort den Wert a_n' annimmt, und wo Ω sich im Punkte (a') analytisch verhält und dort nicht verschwindet.

Da sich nun die in der Nähe von (a') belegenen Nullstellen der Funktionen F' und H_1 gegenseitig decken, so ergibt sich aus dem 1. Satze von Kap. 2, § 8 nebst dem 2. Zusatze, daß

$$F' = Q H_1^{\lambda_1},$$

wo λ_1 eine natürliche Zahl ist und Q im Punkte (a') nicht verschwindet.

Daraus folgt aber, daß die Funktion

$$H_1^{\lambda_1} F = \frac{1}{Q}$$

in der Nähe von (a') nur hebbare Unstetigkeiten aufweist, und daß übrigens die ergänzte Funktion dort nicht verschwindet.

Ich behaupte nun: diese Funktion $H_1^{\lambda_1} F$ hat in sämtlichen Punkten von $\mathfrak{F}'$ nur hebbare Unstetigkeiten, und zwar verschwindet die ergänzte Funktion nirgends in $\mathfrak{F}'$. In der Tat sei (a'') ein zweiter Punkt von $\mathfrak{F}'$, und sei λ' der zugehörige Wert λ_1. Dann kann man (a') mit (a'') durch eine Kurve C verbinden, welche ganz in $\mathfrak{F}'$ verläuft. Da nun die ganzzahlige Funktion λ_1 offenbar in jedem Punkte von C stetig ist, so muß λ_1 konstant sein, und darum ist $\lambda' = \lambda_1$.

Ziehen wir die übrigen Faktoren $H_2, \ldots, H_\mu$ heran und bilden wir das Produkt

$$H_1^{\lambda_1} H_2^{\lambda_2} \ldots H_\mu^{\lambda_\mu} F, \tag{2}$$

so wird hierdurch eine Funktion dargestellt, welche, von hebbaren Unstetigkeiten abgesehen, nur noch in den Punkten einer $(2n-4)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ein unbestimmtes Verhalten aufweist. Nach dem 2. Satze von § 5 unten kann diese Funktion

daher selbst in diesen Punkten nur hebbare Unstetigkeiten zulassen.

Hiermit ist nun dargetan, daß die Funktion (2) eine analytische Fortsetzung über die ganze Nachbarschaft des Punktes (a) hin gestattet. Sei $G(z_1, \ldots, z_n)$ die daraus hervorgehende Funktion. Dann verschwindet G nicht identisch, und G hat auch keinen Teiler im Punkte (a) mit H gemeinsam. Damit ist denn der Beweis des ersten Teiles des Satzes erbracht. — Daß die Bedingung notwendig ist, erkennt man ja sofort.

Eine Erweiterung des Satzes besteht darin, daß man an Stelle der Mannigfaltigkeit $H = 0$ eine beliebige reguläre $(2n-2)$-fach ausgedehnte oder auch sogar eine $(2n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit im Sinne von § 7 treten läßt, und dann eine $(2n-4)$-fach ausgedehnte oder auch eine $(2n-3)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aus der letzteren aussondert. Die Formulierungen des Textes dürften wohl den Bedürfnissen der Praxis besser angepaßt sein.

Wegen einer Reihe weiterer hinreichender Bedingungen vgl. man D. Jackson, *Annals of Mathematics* (2) 17 (1916) S. 172.

§ 3. Hebbare Unstetigkeiten.

Wir wenden uns jetzt zu einer Reihe von Sätzen, welche Verallgemeinerungen des Riemannschen Satzes bezüglich des Verhaltens einer Funktion einer Variabelen in der Nähe einer hebbaren Unstetigkeit bilden.

Die Bezeichnung *hebbare Unstetigkeit* wird hauptsächlich auf die Punkte r-fach ausgedehnter, in einem Bereiche T des $2n$-dimensionalen Raumes der Variabelen $z_1, \ldots, z_n$ belegener Gebilde $\mathfrak{M}$ angewandt, wenn eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ sonst analytisch in T ist und es auch in den Punkten von $\mathfrak{M}$ wird, sobald ihre Definition dort nur in geeigneter Weise getroffen bzw. abgeändert wird. Dabei muß $r < 2n$ sein. In der Regel ist $r = 2n - 2$ bzw. $2n - 4$.

Die beiden Hauptergebnisse können wir nun kurz, wie folgt, aussprechen.[1])

I) *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ in den Punkten eines $2n$-dimensionalen Bereiches T bis auf die Punkte einer*

1) Auch der Satz von Bd. 1, S. 330 gestattet eine unmittelbare Verallgemeinerung, welche später besprochen wird; vgl. § 8.

$(2n-2)$-fach ausgedehnten, in T enthaltenen Mannigfaltigkeit analytisch und bleibt F außerdem endlich, so gestattet F eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T hin, womit sich denn die Ausnahmepunkte als hebbare Unstetigkeiten erweisen.

II) *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ in den Punkten eines $2n$-dimensionalen Bereiches T bis auf die Punkte einer $(2n-4)$-fach ausgedehnten*[1]*, in T enthaltenen Mannigfaltigkeit analytisch, so gestattet F eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T hin, womit sich denn die Ausnahmepunkte als hebbare Unstetigkeiten erweisen.*

In der Praxis besteht die Ausnahmemannigfaltigkeit häufig aus den in der Nähe eines Punktes (a) gelegenen Nullstellen einer im Punkte (a) analytischen, dort verschwindenden Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. aus den gemeinsamen Nullstellen zweier solcher Funktionen, $G_1(z_1, \ldots, z_n)$ und $G_2(z_1, \ldots, z_n)$. Aus diesem Grunde haben wir auch den zweiten Satz dementsprechend formuliert.

Einen besonderen Fall des Satzes I) hat Weierstraß[2]) schon früh erkannt und bewiesen. Läßt sich nämlich die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ als der Quotient zweier im Punkte (a) analytischen Funktionen darstellen:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G_2(z_1, \ldots, z_n)}{G_1(z_1, \ldots, z_n)},$$

so folgt aus der Voraussetzung der Endlichkeit von F, daß G_2 zunächst in jeder Nullstelle eines im Punkte (a) irreduktiblen Faktors von G_1 verschwinden muß. Nach dem 1. Satze von Kap. 2, § 8, S. 106, muß G_2 mithin durch diesen Faktor teilbar sein. So wird man der Reihe nach jeden Faktor von G_1 aus dem Zähler und dem Nenner fortheben können, womit denn schließlich nur eine im Punkte (a) analytische Funktion noch übrig bleibt.

Was den zweiten Satz anbetrifft, so hat Hurwitz[3]) einen besonderen Fall desselben ausgesprochen und den Beweis dafür zugleich angedeutet, indem er hervorhob, daß eine analytische Funktion mehrerer komplexen Veränderlichen keine isolierte singuläre Stelle besitzen kann. Ist $n = 2$, so kann man eine $(2n-4)$-

---

1) Oder sogar bis auf die Punkte einer $(2n-3)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

2) Weierstraß, *Funktionenlehre*, 1885, S. 119 = *Werke*, Bd. 2, S. 146.

3) A. Hurwitz, Züricher Vortrag, *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses*, 1897, S. 104.

fach $= 0$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit eben als einen Punkt ansehen, und hiermit ergibt sich Satz II) für diesen Fall.

Der Satz gilt indessen auch für eine $(2n - 3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Ausnahmepunkten. Ist $n = 2$, so bestehen die Ausnahmepunkte aus einer oder mehreren Kurven des 4-dimensionalen Raumes. Und nun besagt der Satz, daß eine Funktion $F(w, z)$, welche sonst in der Umgebung eines Punktes (a) analytisch ist — selbst dann, wenn man nicht weiß, daß sie endlich bleibt —, doch stets eine analytische Fortsetzung über die ganze Umgebung von (a) hin gestattet und somit höchstens hebbare Unstetigkeiten dort zulassen kann.

Im übrigen kann die Umgebung von (a) durch Kurven niemals in einen Bereich von höherem linearen Zusammenhange verwandelt werden. Demgemäß kann es keine mehrdeutige Funktion geben, deren Zweige sich in der Nähe von (a) bis auf die Punkte einer aus Kurven bestehenden Mannigfaltigkeit analytisch verhalten und im genannten Bereiche ineinander übergehen. Diesem Sachverhalt kann man eine andere Formulierung geben.

Satz. *Sei T eine linear einfach zusammenhängende Umgebung eines Punktes (a), und sei Σ eine Mannigfaltigkeit M_r, $r \leqq 2n - 3$, vgl. § 7. Sei T' der Bereich, welcher durch Forthebung der Punkte von Σ aus T entsteht. Läßt sich dann ein in der Umgebung eines Punktes (z') von T' definiertes Funktionselement $\mathfrak{F}$ über jeden in T' belegenen Weg hin analytisch fortsetzen, so läßt sich $\mathfrak{F}$ auch in jeden Punkt von Σ analytisch fortsetzen, und aus $\mathfrak{F}$ entsteht somit eine im ganzen Bereiche T analytische Funktion.*

Zum Beweise der Sätze I) und II) bedient man sich der Cauchyschen Integralformel.[1]) Dadurch erhält man zugleich Sätze, welche viel allgemeiner als die in diesem Paragraphen ausgesprochenen Theoreme sind. Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der Einzelheiten hin.

§ 4. Fortsetzung. Die beiden Hauptsätze.

1. Hauptsatz. *In einem Kreiszylinderbereiche*

$$T: \qquad |z_i - a_i| < r_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

1) Diese Methode ist von Kistler, *Über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen*, Göttinger Dissertation, Basel 1907, und Hartogs, vgl. unten § 9, mit Erfolg verwendet worden. Von Kistler rühren auch die beiden vorstehenden Sätze (der zweite nur für den Fall $2n - 4$) her.

sei eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im allgemeinen analytisch.[1]) *Dabei soll einem beliebigen Wertesysteme $(z_2', \ldots, z_n')$,*

$$|z_i' - a_i| < r_i, \qquad i=2,\ldots,n,$$

nur eine endliche Anzahl[2]) *von Ausnahmepunkten*

$$(z_1^{(k)}, z_2', \ldots, z_n'), \qquad k=1,2,\ldots,$$

entsprechen, und zwar soll

$$|z_1^{(k)} - a_1| < h_1 < r_1$$

sein, wo h_1 eine Konstante bedeutet. Bleibt F fernerhin endlich, so läßt sich F über den ganzen Bereich T hin analytisch fortsetzen.

Zum Beweise betrachten wir $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, wobei z_i, $i=2,\ldots,n$, im Kreise $|z_i - a_i| < r_i$ beliebig gewählt und dann festgehalten wird, als Funktion von z_1 allein. Den Voraussetzungen des Satzes zufolge wird diese Funktion nur hebbare Unstetigkeiten aufweisen. Demgemäß läßt sich die ergänzte Funktion zunächst für alle Punkte z_1, welche an die Bedingung

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad h_1 < r_1' < r_1$$

geknüpft sind, durch die Cauchysche Integralformel darstellen:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{F(t_1, z_2, \ldots, z_n)}{t_1 - z_1}\, dt_1,$$

wobei über den Kreis C_1: $|z_1 - a_1| = r_1'$ integriert wird. Für diejenigen dieser Punkte, welche der Relation

$$h_1 < |z_1 - a_1| < r_1'$$

genügen, war aber die ursprüngliche Funktion bereits definiert.

Nun stellt aber die rechter Hand stehende Formel eine Funktion vor, welche sich im ganzen Bereiche

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad |z_i - a_i| < r_i, \qquad i=2,\ldots,n,$$

analytisch verhält, Kap. 1, § 8, 3. Satz, und da nun r_1' beliebig nahe an r_1 gerückt werden kann, so gestattet diese Funktion eine

---

1) Hierin ist ja die Forderung der Eindeutigkeit mit enthalten; Kap. 1, § 5.

2) Diese Anzahl braucht indessen nicht für die verschiedenen Punkte $(z_2', \ldots, z_n')$ den gleichen Wert beizubehalten. Auch kann für einen beliebigen Punkt $(z_2', \ldots, z_n')$ die Menge der Ausnahmepunkte unendlich sein, sofern nur die erste Ableitung (I, S. 570, 1. Anm.) oder allgemein eine bestimmte Ableitung davon aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht.

analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T hin. Hiermit ist der in Aussicht genommene Beweis erbracht.

2. Hauptsatz. *In einem Kreiszylinderbereiche*

$$T: \qquad |z_i - a_i| < r_i, \qquad i=1,\ldots,n,$$

sei eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ *analytisch mit Ausnahme gewisser Punkte* $(z_1', z_2', z_3', \ldots, z_n')$, *welche im Bereiche*

$$|z_1 - a_1| < h_1 < r_1, \qquad |z_2 - a_2| < h_2 < r_2,$$
$$|z_i - a_i| < r_i, \qquad i=3,\ldots,n,$$

beliebig gelegen sein dürfen; dabei sind h_1, h_2 *Konstanten. Dann läßt sich* F *über den ganzen Bereich* T *hin analytisch fortsetzen.*[1])

Zum Beweise nehmen wir z_2 im Kreisringe $h_2 < |z_2 - a_2| < r_2$ und z_i, $i=3,\ldots,n$, im Kreise $|z_i - a_i| < r_i$ willkürlich an und halten diese Argumente dann fest. Hierdurch geht F in eine im Kreise $|z_1 - a_1| < r_1$ analytische Funktion von z_1 allein über und gestattet somit im Kreise

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad 0 < r_1' < r_1,$$

eine Darstellung durch die Cauchysche Integralformel:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{F(t_1, z_2, \ldots, z_n)}{t_1 - z_1}\, dt,$$

wobei über den Kreis C_1: $|z_1 - a_1| = r_1'$ integriert wird.

Nun stellt aber die rechter Hand stehende Formel eine Funktion vor, welche sich im ganzen Bereiche

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad |z_i - a_i| < r_i, \qquad i=2,\ldots,n,$$

analytisch verhält, Kap. 1, § 8, 3. Satz, und da nun r_1' beliebig nahe an r_1 gerückt werden kann, so gestattet diese Funktion eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T hin.

---

1) Wie man sieht, ist von der *Endlichkeit* der Funktion bei diesem Satze nicht mehr die Rede. Auch wird über die Definition oder das Verhalten der Funktion in keinem Punkte des Bereiches

$$|z_1 - a_1| < h_1, \qquad |z_2 - a_2| < h_2, \qquad |z_k - a_k| < r_k, \qquad k=3,\ldots,n,$$

irgendeine Voraussetzung gemacht.

§ 5. Von der Tragweite dieser Sätze.

a) *Lineare und allgemeine Transformationen.* Vor allem ist klar, daß jeder der beiden Hauptsätze auch für solche Funktionen $F(z_1, \ldots, z_n)$ gilt, welche nach Ausübung einer nicht-singulären linearen Transformation

$$z'_k = c_{k1} z_1 + \cdots + c_{kn} z_n + c_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

oder allgemeiner einer nicht-singulären analytischen Transformation

$$z'_k = \varphi_k(z_1, \ldots, z_n), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

in Funktionen $F'(z'_1, \ldots, z'_n)$ übergehen, die im transformierten Bereiche den Bedingungen des betreffenden Satzes genügen.

b) *Besondere singuläre Gebilde.* Aus der soeben gemachten Bemerkung erkennt man, daß der erste Satz, § 4, insbesondere zum folgenden, für die Praxis nützlichen Theorem führt.

1. Satz. *In der Umgebung eines Punktes $(z) = (a)$ sei eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im allgemeinen analytisch. Dabei mögen die Ausnahmepunkte sich unter den Nullstellen einer Funktion G befinden:*

$$G(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo G sich im Punkte (a) analytisch verhält und dort verschwindet, ohne identisch zu verschwinden. Bleibt F fernerhin endlich im genannten Bereiche, so läßt sich F über den ganzen Bereich hin analytisch fortsetzen und weist somit in den Ausnahmepunkten nur hebbare Unstetigkeiten auf.

Ebenso kann man aus dem zweiten Satze ein besonderes Theorem ableiten, welches in der Praxis häufig zur Anwendung kommt.

2. Satz. *In der Umgebung eines Punktes $(z) = (a)$ sei eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im allgemeinen analytisch. Dabei mögen die Ausnahmepunkte sich unter den simultanen Nullstellen zweier Funktionen G_1 und G_2 befinden:*

$$G_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad G_2(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo G_1, G_2 sich im Punkte (a) analytisch verhalten und dort verschwinden, und außerdem keinen gemeinsamen Teiler im Punkte (a) haben. Dann läßt sich F über den ganzen Bereich hin analytisch

fortsetzen und weist somit in den Ausnahmepunkten nur hebbare Singularitäten auf.

Eine andere Art singulärer Gebilde sind die in § 7 zu besprechenden regulären Mannigfaltigkeiten k-ter Ordnung, M_k. Es läßt sich leicht zeigen, daß die obigen Sätze auch für den Fall bestehen, daß die Ausnahmepunkte eine M_{2n-2} bzw. eine M_{2n-4} ausmachen.[1])

c) *Von der Allgemeinheit der Sätze von* § 4. Mit Hilfe der Bemerkung a) haben wir aus den Sätzen von § 4 soeben zwei neue Sätze abgeleitet, welche nach einer Richtung hin allgemeiner sind. Dabei haben wir aber nur einen Teil jener Sätze mit aufgenommen, so daß also die Sätze dieses Paragraphen nicht als spezielle Fälle der anderen Sätze erscheinen.

In der Tat verlangen die Voraussetzungen des 1. Satzes, § 4, nicht einmal die Stetigkeit des Ausnahmegebildes. Und im Falle des 2. Satzes, § 4, dürfen die singulären Punkte im besonderen den Rand eines beliebigen $2n$-fach ausgedehnten Bereiches bilden, sofern derselbe nur im bewußten Raumteile:

$$|z_1 - a_1| < h_1, \qquad |z_2 - a_2| < h_2, \qquad |z_i - a_i| < r_i, \qquad i = 3, \ldots, n,$$

liegt.

§ 6. Eine Verallgemeinerung des zweiten Satzes.

Satz. *In einem Zylinderbereiche*

$$T: \quad |z_1 - a_1| < r_1, \qquad |x_2 - \alpha_2| < p, \qquad |y_2 - \beta_2| < q,$$
$$|z_i - a_i| < r_i, \qquad i = 3, \ldots, n,$$

sei eine Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ analytisch mit Ausnahme gewisser Punkte, welche im Bereiche

$$|z_1 - a_1| < h_1 < r_1, \qquad |x_2 - \alpha_2| < p, \qquad |y_2 - \beta_2| < \varrho < q,$$
$$|z_i - a_i| < r_i, \qquad i = 3, \ldots, n,$$

beliebig belegen sein dürfen; dabei sind h_1 und ϱ Konstanten. Dann läßt sich F über den ganzen Bereich T hin analytisch fortsetzen.

---

1) Ein anderer Beweis des zweiten Satzes, welcher Interesse bietet, ist von Milne gegeben worden: *Bulletin Amer. Math. Soc.* (2) 21 (1914), S. 116.

Zum Beweise nehmen wir z_2 im Bereiche

$$|x_2 - \alpha_2| < p, \qquad \varrho < y_2 < q \quad \text{bzw.} \quad -q < y_2 < -\varrho,$$

und z_i im Bereiche $|z_i - a_i| < r_i$, $i=3, \ldots, n$, willkürlich an und halten diese Argumente dann fest. Hierdurch geht F in eine im Kreise $|z_1 - a_1| < r_1$ analytische Funktion von z_1 allein über und gestattet somit im Kreise

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad 0 < r_1' < r_1,$$

eine Darstellung durch die Cauchysche Integralformel:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{F(t_1, z_2, \ldots, z_n)}{t_1 - z_1} \, dt_1,$$

wobei über den Kreis C_1: $|z_1 - a_1| = r_1'$ integriert wird.

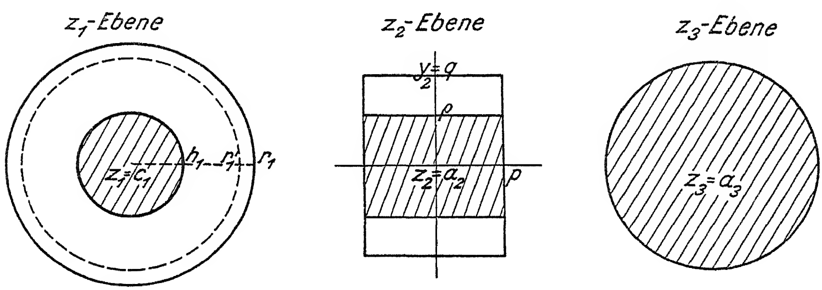

Fig. 4.

Nun stellt aber die rechter Hand stehende Formel eine Funktion vor, welche sich im ganzen Bereiche

$$|z_1 - a_1| < r_1', \qquad |x_2 - \alpha_2| < p, \qquad |y_2 - \beta_2| < q,$$
$$|z_i - a_i| < r_i, \qquad i=3, \ldots, n,$$

analytisch verhält, Kap. 1, § 8, 3. Satz, und da r_1' beliebig nahe an r_1 gerückt werden kann, so gestattet diese Funktion eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T hin.

§ 7. Von der Mannigfaltigkeit M_r.

Sei

$$z_k = x_k + i y_k, \qquad a_k = \alpha_k + i \beta_k, \qquad k=1, \ldots, n.$$

Dann soll die Mannigfaltigkeit M_r aus den Punkten $(z_1, \ldots, z_n)$ bestehen, wofür

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_k &= \varphi_{2k-1}(t_1, \ldots, t_r), \\ y_k &= \varphi_{2k}(t_1, \ldots, t_r) \end{aligned} \right.$$

ist. Dabei sollen die $2n$ reellen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ der r reellen Argumente $t_1, \ldots, t_r$, $r<2n$, nebst allen partiellen Ableitungen erster Ordnung, in einer bestimmten Umgebung des Anfangs $(t) = (0)$ stetig sein und in diesem Punkte die Werte annehmen:

$$\alpha_k = \varphi_{2k-1}(0, \ldots, 0), \qquad \beta_k = \varphi_{2k}(0, \ldots, 0).$$

Außerdem soll die Matrix

$$\mathfrak{M}: \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_r} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial t_r} \end{matrix} \right\|$$

im Punkte $(t) = (0)$ vom Range r sein.

Der Fall $r = 2n - 3$. Verschwindet hier die $(2n-3)$-reihige Determinante nicht, welche durch Fortlassung der 1., 2. und 4. Zeile aus der Matrix $\mathfrak{M}$ entsteht, so lassen sich die entsprechenden $r = 2n - 3$ Gleichungen aus (A) nach den t_i auflösen. Indem nun die also erhaltenen Werte von t_i in den übrigen Gleichungen eingetragen werden, wird M_{2n-3} in der Nähe des Punktes $(z) = (a)$ durch die folgenden drei Gleichungen dargestellt:

$$\text{(B)} \qquad x_1 = \omega_1, \qquad y_1 = \omega_2, \qquad y_2 = \omega_3,$$

wobei die Funktionen

$$\omega_j(x_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n), \qquad j=1,2,3,$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung, in einem bestimmten Bereiche

$$R: \qquad |x_2 - \alpha_2| < p, \qquad |z_k - a_k| < r_k, \qquad k=3,\ldots,n,$$

stetig sind und im Punkte $(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ bzw. die Werte $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ annehmen.

Ist andererseits die $(2n-3)$-reihige Determinante, welche durch Fortlassung der 2., 4. und 6. Zeile $(n \geqq 3)$ aus der Matrix $\mathfrak{M}$ entsteht, von null verschieden, so lassen sich die Gleichungen (A) durch folgende ersetzen:

$$\text{(B')} \qquad y_j = \psi_j(x_1, x_2, x_3, x_4, y_4, \ldots, x_n, y_n), \qquad j=1,2,3$$

wobei die Funktionen ψ_j, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung, in einem bestimmten Bereiche

$$R': \qquad |x_j - \alpha_j| < p_j, \quad j=1,2,3; \qquad |z_k - a_k| < r_k, \quad k=4,\ldots,n,$$

stetig sind und im Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ bzw. die Werte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ annehmen.

Wie man sofort sieht, läßt sich jeder andere Fall $r = 2n - 3$ zunächst auf einen dieser beiden zurückführen, indem man eine geeignete Permutation der $z_1, \ldots, z_n$ vornimmt und eventuell auch einige der z_k durch iz_k ersetzt.

Aber auch der zweite Fall kann durch eine nicht-singuläre lineare Transformation:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} z_1 = (\alpha_1 + i\beta_1) z_1' + (\gamma_1 + i\delta_1) z_3', \\ z_3 = (\alpha_3 + i\beta_3) z_1' + (\gamma_3 + i\delta_3) z_3', \\ z_k = z_k', \quad {\scriptstyle k = 2, *, 4, \ldots, n,} \end{cases}$$

— dabei haben wir ja der Kürze halber $(a) = (0)$ gesetzt; im übrigen haben die hier verwendeten Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \beta_3$ mit den früheren Größen $\alpha_1, \ldots, \beta_3$ nichts zu tun, — auf den ersten zurückgeführt werden. Setzt man nämlich

$$\Omega(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = y_1 - \psi_1,$$

$$\mathrm{X}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = y_3 - \psi_3,$$

sowie ferner

$$\Omega(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \Omega'(x_1', y_1', \ldots, x_n', y_n'),$$

$$\mathrm{X}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \mathrm{X}'(x_1', y_1', \ldots, x_n', y_n'),$$

so handelt es sich darum, ob das Gleichungssystem

$$\Omega' = 0, \qquad \mathrm{X}' = 0$$

nach x_1', y_1' aufgelöst werden kann. Dazu genügt ja, daß die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(\Omega', \mathrm{X}')}{\partial(x_1', y_1')} = \begin{vmatrix} -\alpha_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \alpha_3 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \beta_1, & \beta_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \beta_3 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \alpha_1 \\ -\alpha_1 \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \alpha_3 \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + \beta_3, & \beta_1 \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \beta_3 \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + \alpha_3 \end{vmatrix}$$

im Anfange nicht verschwinde. Diese ist aber ein Polynom in $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$, dessen Koeffizienten nur dann sämtlich verschwinden könnten, wenn insbesondere die Koeffizienten der Glieder in α_1^2, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\beta_3$ verschwinden:

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + 1 = 0,$$

und dies geht offenbar nicht an. Das Resultat können wir, wie folgt, zusammenfassen.

1. Satz. *Ist $r = 2n - 3$ und legt man dabei ein nicht-spezialisiertes Koordinatensystem zugrunde, so läßt sich die Mannigfaltigkeit M_{2n-3} durch die Gleichungen* (B) *darstellen.*

Ist insbesondere $n = 2$, so besteht $M_{2n-3} = M_1$ aus einer regulären, durch den Punkt (a_1, a_2) hindurch gehenden Kurve.

Der Fall $r = 2n - 2$. Dieser Fall läßt sich in ähnlicher Weise behandeln. Wir können das Ergebnis ohne weiteres aussprechen.

2. Satz. *Ist $r = 2n - 2$ und legt man dabei ein nicht-spezialisiertes Koordinatensystem zugrunde, so läßt sich die Mannigfaltigkeit M_{2n-2} durch die Gleichungen darstellen:*

$$\text{(C)} \qquad x_1 = \omega_1, \qquad y_1 = \omega_2,$$

wobei die Funktionen $\omega_j(x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$, $j=1, 2$, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in einem Bereiche

$$|z_k - a_k| < r_k, \qquad k = 2, \ldots, n$$

stetig sind und im Punkte $(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ bzw. die Werte α_1, β_1 annehmen.

Wie man leicht nachweist, bleibt der Satz auch dann noch bestehen, wenn man an Stelle der bevorzugten Variabelen $z_1 = x_1 + iy_1$, irgendeine andere Veränderliche $z_k = x_k + iy_k$ treten läßt, und zwar gleichzeitig für jede Wahl von k.

Der Fall $r = 2n - 1$. Wir erteilen dem Satze hier zugleich eine Formulierung, welche der Aufnahme der dem vorhergehenden Satze hinzugefügten Bemerkung entspricht.

3. Satz. *Ist $r = 2n - 1$ und legt man dabei ein nicht-spezialisiertes Koordinatensystem zugrunde, so läßt sich die Mannigfaltigkeit M_{2n-1} gleichzeitig durch jede der folgenden Gleichungen darstellen:*

$$\text{(D)} \quad y_k = \omega_k(x_1, y_1, \ldots, x_k, *, x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots, x_n, y_n), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wobei die Funktion ω_k nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung der Stelle $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, *, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ stetig ist und im genannten Punkte den Wert β_k annimmt.

Daß eine solche Darstellung für einen besonderen Wert von k, etwa $k = 1$, möglich ist, erkennt man geradeso, wie in den

früheren Fällen. Und nun braucht man nur noch eine nicht-singuläre lineare Transformation mit reellen Koeffizienten zu machen:

$$z_k = c_{k1} z'_1 + \cdots + c_{kn} z'_n, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wo wiederum der Einfachheit halber $(a) = (0)$ gesetzt ist, um zu erkennen, daß sich die der Gleichung

$$y_1 = \omega_1(x_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$$

entsprechende Gleichung in den transformierten Variabelen nach einem beliebigen y'_k auflösen läßt.

Auf Grund der beiden Sätze von § 4, *nebst der Bemerkung* a), § 5, *erkennt man nunmehr die Richtigkeit der Sätze* I), II), § 3 *für Mannigfaltigkeiten* M_{2n-2} *bzw.* M_{2n-3}.

Da übrigens eine M_{2n-4} sich in ersichtlicher Weise in einer M_{2n-3} einbetten läßt, so gilt der zweite jener Sätze auch für eine M_{2n-4}.

§ 8. Eine Verallgemeinerung eines weiteren Riemannschen Satzes.

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung des Riemannschen Satzes von Bd. I, S. 330.

Satz. *In der Umgebung eines Punktes* $(z) = (a)$ *sei eine Funktion* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *ausnahmslos stetig und im allgemeinen analytisch. Dabei sollen die Ausnahmepunkte auf einer Mannigfaltigkeit* M_{2n-1}, § 7, *liegen. Dann verhält sich* F *auch in diesen Punkten analytisch.*

Indem man nötigenfalls eine lineare Transformation vorausschickt, kann man erreichen, daß F sich im allgemeinen in einem Bereiche

$$T: \qquad |x_j - \alpha_j| < p_j, \qquad |y_j - \beta_j| < q_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält, während andererseits M_{2n-1} sich in der Nähe von (a) durch die Gleichungen (D), § 7, darstellen läßt.

Es lassen sich fernerhin $2n$ Zahlen p_j, q'_j:

$$0 < p'_j < p_j, \qquad 0 < q'_j < q_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

so wählen, daß, sobald die $2n-1$ Argumente der Funktion ω_k an die entsprechenden $2n-1$ der $2n$ Relationen

$$|x_j - \alpha_j| \leqq p'_j, \qquad |y_j - \beta_j| \leqq q'_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

geknüpft sind, die abhängige Variabele $y_k = \omega_k$ dann der Bedingung genügt:

$$| y_k - \beta_k | < q_k.$$

Wir erteilen jetzt den letzten $n-1$ der Argumente $z_1, \ldots, z_n$ von F einen willkürlichen Wert im Bereiche

$$| x_j - \alpha_j | < p'_j, \qquad | y_j - \beta_j | < q'_j, \qquad j = 2, \ldots, n,$$

und halten dieselben dann fest. Indem wir $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ als Funktion von z_1 allein betrachten, verhält sich diese im Bereiche

$$T_1: \qquad | x_1 - \alpha_1 | \leqq p'_1, \qquad | y_1 - \beta_1 | < q_1$$

analytisch mit Ausnahme der Punkte

$$y_1 = \omega_1.$$

Diese bilden aber eine reguläre Kurve, welche den Bereich durchsetzt, ohne dabei den oberen oder den unteren Rand desselben, $y_1 - \beta_1 = \pm q_1$, zu treffen. Nach dem genannten Riemannschen Satze verhält sich F mithin analytisch im ganzen Bereiche T_1.

Sei z_1 ein beliebiger innerhalb der Randkurve C_1 des Bereiches

$$| x_1 - \alpha_1 | < p'_1, \qquad | y_1 - \beta_1 | < q'_1$$

gelegener Punkt. Dann läßt sich F für diesen Punkt z_1 und für die früheren Werte $z_2, \ldots, z_n$ durch die Cauchysche Integralformel darstellen:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{F(t_1, z_2, \ldots, z_n)}{t_1 - z_1} \, dt_1.$$

Wir fassen jetzt die Funktion F für einen beliebigen Wert von t_1 auf C_1 und für die früheren Werte der letzten $n-2$ Argumente $z_3, \ldots, z_n$ ins Auge, während wir z_2 bloß auf den Bereich

$$T_2: \qquad | x_2 - \alpha_2 | \leqq p'_2, \qquad | y_2 - \beta_2 | < q_2$$

beschränken. Dann verhält sich F, als Funktion von z_2 allein betrachtet, analytisch in T_2 und läßt sich außerdem für jeden Punkt des Bereiches

$$| x_2 - \alpha_2 | < p'_2, \qquad | y_2 - \beta_2 | < q'_2$$

durch die Integralformel darstellen:

$$F(t_1, z_2, z_3, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{F(t_1, t_2, \ldots, z_n)}{t_2 - z_2}\, dt_2,$$

wobei C_2 sich auf den Rand dieses Bereiches bezieht.

Indem man so fortfährt, gelangt man endlich zu einer Darstellung von F im Bereiche

$$T': \qquad |x_j - \alpha_j| < p'_j, \qquad |y_j - \beta_j| < q'_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

durch die Formel:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int\limits_{C_2} \frac{dt_2}{t_2 - z_2} \cdots \int\limits_{C_n} \frac{F(t_1, \ldots, t_n)}{t_n - z_n}\, dt_n.$$

Nun ist aber $F(t_1, \ldots, t_n)$ stetig in jedem der Punkte $(t_1, \ldots, t_n)$. Mithin stellt diese Formel eine im ganzen genannten Bereiche analytische Funktion vor, und hiermit ist der Beweis geliefert.

§ 9. Zwei Hartogssche Sätze.

Hartogs[1]) hat die Cauchysche Integralformel zur Ermittelung von Sätzen betreffend analytische Fortsetzung über Zylinderbereiche hin mit großem Erfolge angewandt. Dabei ist der folgende Satz von prinzipieller Bedeutung.

1. Satz. *Sei $T = (T_1, T_2)$ ein regulärer Zylinderbereich im Raume der komplexen Veränderlichen (z_1, z_2), und sei K ein regulärer, in T_2 belegener Bereich der z_2-Ebene. Sei ferner $f(z_1, z_2)$ eine Funktion von der folgenden Beschaffenheit:*

a) *Im Innern des vier-dimensionalen Zylinderbereiches (T_1, K) sei $f(z_1, z_2)$ analytisch. Ist fernerhin z'_2 ein beliebiger innerer Punkt von K, so soll $f(z_1, z'_2)$, als Funktion von z_1 allein betrachtet, am Rande C_1 von T_1 stetig sein.*

b) *Ist t_1 ein beliebiger Punkt von C_1, so soll $f(t_1, z_2)$, als Funktion von z_2 allein betrachtet, im Innern von T_2 analytisch und am Rande C_2 dieses Bereiches stetig sein;*

---

1) Hartogs, *Sitzungsber. der Münchener Akad.* 36 (1906) S. 223. Der nachstehende Satz, welcher übrigens ein wenig anders wie bei Hartogs formuliert ist, — vgl. das *Madison Colloquium*, S. 166, — enthält die Sätze von § 4 als Spezialfälle, ist aber wesentlich allgemeiner. Darum hielten wir es für angezeigt, einen einfacheren Beweis jener Sätze damals zu geben. Andererseits hat Hartogs jene Sätze nicht erwähnt.

c) *Endlich soll $f(t_1, t_2)$, wo t_1 die Kurve C_1 und unabhängig davon t_2 die Kurve C_2 durchläuft, in diesen beiden Veränderlichen stetig sein.*

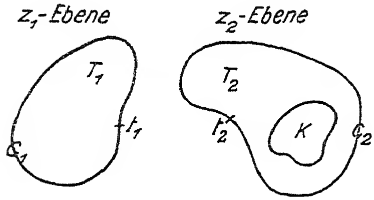

Fig 5.

Alsdann läßt sich $f(z_1, z_2)$ über das ganze Innere des Bereiches T hin analytisch fortsetzen.

Der Beweis ist äußerst einfach. Zunächst läßt sich f in jedem inneren Punkte des Bereiches (T_1, K) vermöge der Integralformel, wie folgt, darstellen:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t_1, z_2)}{t_1 - z_1} \, dt_1.$$

Sodann kann man die hier auftretende Funktion $f(t_1, z_2)$ durch eine zweite Anwendung der Integralformel in der Form ausdrücken:

$$f(t_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(t_1, t_2)}{t_2 - z_2} \, dt_2.$$

So kommt denn:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int_{C_2} \frac{f(t_1, t_2)}{t_2 - z_2} \, dt_2.$$

Diese Formel stellt nun nach Kap. 1, § 8, 3. Satz eine im ganzen Bereiche T analytische Funktion vor, welche außerdem in einem vier-dimensionalen Teile von T, nämlich im Zylinderbereiche (T_1, K), mit der vorgelegten Funktion $f(z_1, z_2)$ übereinstimmt. Hiermit ist der Beweis des Satzes geliefert.

Erörterung des Satzes. Vor allem wollen wir das Wesen der Voraussetzungen einer näheren Kritik unterziehen. Die Hypothese a) ist, sozusagen, eine vier-dimensionale, da sie sich auf jeden Punkt einer vier-dimensionalen Mannigfaltigkeit bezieht. In gleichem Sinne ist b) drei-dimensional, und endlich ist c) zweidimensional.

Die Hypothese a) hat ferner dieselbe Dimensionalität als der vorgelegte Bereich T selbst. Die Hypothese b) bezieht sich auf ein Stück des Randes, welches dieselbe Dimensionalität wie der ganze Rand besitzt. Endlich hat c) es nur mit einem am Rande belegenen Gebiete von niederer Dimensionalität zu tun.

Um mehr geometrische Fühlung für den Tatbestand zu gewinnen, knüpfen wir an die Vorstellungen der algebraischen Geometrie an, wobei man von Kurven und Flächen im imaginären Gebiete redet und zur Vorstellung davon die Anschauung im gewöhnlichen Raume gewissermaßen auf den komplexen Raum überträgt. So hat man sich denn hier den Zylinderbereich T als ein Rechteck in der (z_1, z_2)-Ebene der analytischen Geometrie zu denken, wobei also ein vier-dimensionaler Bereich durch Analogie von einem Stücke der Ebene vertreten wird.

Die Hypothese a) bezieht sich nun auf einen schmalen, das Rechteck durchquerenden Streifen, während die Bedingungen b) und c) sich bloß am Rande bewegen. Als Ergebnis erhalten wir dann eine Fortsetzung der zunächst bloß in jenem Streifen erklärten Funktion über das ganze Rechteck hin.

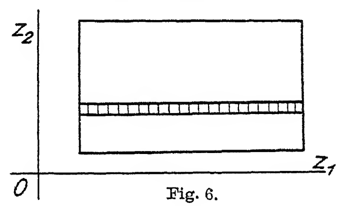

Fig. 6.

Ausdehnung desselben auf $n > 2$ Argumente. Die Verallgemeinerung des Satzes liegt schon auf der Hand. So wird man im Falle $n = 3$ von einem regulären Zylinderbereiche $T = (T_1, T_2, T_3)$ nebst zwei in T_2 und T_3 belegenen regulären Bereichen K_2 bzw. K_3 ausgehen und verlangen,

a) daß $f(z_1, z_2, z_3)$ sich im Bereiche (T_1, K_2, K_3) analytisch verhalte und außerdem, als Funktion von z_1 allein betrachtet, wobei z_i in K_i $(i = 2, 3)$ liegt, am Rande C_1 von T_1 stetig sei;

b) daß $f(t_1, z_2, z_3)$, als Funktion von z_2 allein betrachtet, wobei t_1 auf C_1 und z_3 in K_3 liegt, sich im Bereiche T_2 analytisch verhalte und stetig am Rande C_2 desselben sei;

c) daß $f(t_1, t_2, z_3)$, als Funktion von z_3 allein betrachtet, wobei t_i auf C_i liegt, sich im Bereiche T_3 analytisch verhalte und am Rande C_3 desselben stetig sei;

d) daß $f(t_1, t_2, t_3)$ stetig sei, wenn t_1, t_2, t_3 unabhängig voneinander bzw. die Kurven C_1, C_2, C_3 durchlaufen.

Alsdann läßt sich f über den ganzen Bereich T analytisch fortsetzen.[1])

Insbesondere werden die Bedingungen des Satzes sicher erfüllt, wenn sich die Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Randpunkte

1) Wegen einer Verallgemeinerung dieses Satzes vergleiche man Hartogs, a. a. O., S. 234, sowie das *Madison Colloquium*, S. 171.

eines regulären Zylinderbereiches $T = (T_1, \ldots, T_n)$ analytisch verhält. Hiermit haben wir bereits einen Beweis des folgenden Satzes.

2. Satz. *Ist eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ in der Umgebung eines jeden Randpunktes eines regulären Zylinderbereiches*

$$T = (T_1, \ldots, T_n)$$

eindeutig erklärt und verhält sich f dort analytisch, so gestattet f eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T.

Mit diesem Satze hat Hartogs a. a. O. den ersten Spezialfall eines der frappantesten Sätze aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen gefunden. Der Satz gilt nämlich allgemein für einen beliebigen Bereich T des $2n$-dimensionalen Raumes, vgl. § 11.

Nachdem Hartogs seinen Satz bewiesen hatte, erhielt dann E. E. Levi[1]) den folgenden Satz. Verhält sich eine Funktion zweier Argumente, $f(x, y)$, in jedem Randpunkte eines vierdimensionalen Bereiches T meromorph, so läßt sich f im Innern von T meromorph fortsetzen, d. h. analytisch fortsetzen, derart, daß die also erhaltene Funktion sich überall im Bereich T meromorph verhält.

Indem man nun die Methoden von Hartogs und Levi kombiniert, gewinnt man den vorhin erwähnten Satz von § 11, welcher eben darin besteht, daß man im Levischen Satze das Wort *meromorph* durch *analytisch* ersetzt und zugleich den Fall $n \geqq 2$ aufnimmt. Der Beweis dieses Satzes hängt vom Satze des nachfolgenden Paragraphen ab.

§ 10. Ein weiterer Satz von Hartogs.

Satz.[2]) *Sei $f(x_1, \ldots, x_n, y) = f(x, y)$ eine Funktion, welche sich in jedem Punkte der Menge*

$$\Sigma: \qquad |y| = K, \qquad 0 < K; \qquad x_i = a_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält und sich längs keines der Wege

$$L: \qquad y = te^{\alpha i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K; \qquad x_i = a_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

---

1) Vgl. unten, § 13.
2) Hartogs, a. a. O.

bis in den Punkt $(x, y) = (a, 0)$ *analytisch fortsetzen läßt. Alsdann gibt es einen Zylinderbereich* $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n)$,

$$\mathfrak{H}_i: \qquad |x_i - a_i| < h_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

derart, daß $f(x, y)$ *sich in jedem Punkte* (x, y), *wo* (x) *in* $\mathfrak{H}$ *liegt und* $|y| = K$ *ist, analytisch verhält, während andererseits jedem Punkte* (x^0) *von* $\mathfrak{H}$ *mindestens ein Punkt* $y_0 = \varrho e^{\theta i}$, $0 \leqq \varrho < K$, *entspricht, wofür* $f(x, y)$ *längs der Kurve*

$$L_0: \qquad y = t e^{\theta i}, \quad \varrho \leqq t \leqq K; \qquad x_i = x_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

bis in jede Nachbarschaft der Stelle (x^0, y_0) *hinein analytisch fortgesetzt werden kann, ohne jedoch diesen Punkt selbst zu erreichen.*

Der Kürze halber setzen wir $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Da f sich in jedem Punkte der abgeschlossenen Menge

$$x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad |y| = K$$

analytisch verhält, so gibt es $n + 1$ positive Zahlen, h_i, $i = 1, \ldots, n$; $k < K$, derart, daß f sich auch in jedem Punkte des Bereiches

$$T: \qquad |x_i| \leqq h_i, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad g \leqq |y| \leqq K,$$

analytisch verhält.

Sei $(x^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ein beliebiger innerer Punkt des Bereiches $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n)$:

$$\mathfrak{H}_i: \qquad |x_i| < h_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und sei ferner

$$0 < \varepsilon_i < h_i - |x_i^0|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dann verhält sich f im Bereiche

$$T': \qquad |x_i - x_i^0| \leqq \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad g \leqq |y| \leqq K$$

analytisch. Dagegen läßt sich diese Funktion nicht über den übrigen Teil des Bereiches

$$|x_i - x_i^0| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad |y| \leqq K$$

analytisch fortsetzen, wie man aus dem 1. Satze von § 9 erkennt. In der Tat gewinnt man Anschluß an jenen Satz, indem man $z_1 = y$, $z_k = x_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, setzt und als Bereich T_1 den Kreis $|y| \leqq K$ nimmt, während T_k, $k = 2, 3, \ldots$, aus dem Kreise

$|x_{k-1}| \leqq h_{k-1}$ bestehen soll. Endlich werde K_k mit dem Kreise $|x_{k-1} - x_{k-1}^0| \leqq \varepsilon_{k-1}$ identifiziert.[1])

Sei ϱ die untere Grenze der Werte, welche g annehmen kann, wenn man (x^0) und die ε_i festhält. Ist $\varrho = 0$, so ist $y_0 = 0$ schon der in Aussicht genommene Punkt. Ist dagegen $\varrho > 0$, so muß es offenbar mindestens einen Punkt $y_0 = \varrho e^{\theta i}$ auf dem Kreise $|y| = \varrho$ geben, derart, daß die Funktion $f(x, y)$ sich nicht längs des Weges

$$y = te^{\theta i}, \qquad \varrho \leqq t \leqq K; \qquad x_i = x_i^0, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,n,}$$

bis in den Punkt (x^0, y_0) hinein analytisch fortsetzen läßt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Zusatz.[2]) *Sei P ein Randpunkt einer Hyperkugel $\mathfrak{K}$, und sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche sich in dem außerhalb $\mathfrak{K}$ belegenen Teile T der Umgebung von P analytisch verhält. Dann läßt sich f am Punkte P über T hinaus ins Innere von $\mathfrak{K}$ analytisch fortsetzen.*

Wir wollen den Anfang in den Mittelpunkt O von $\mathfrak{K}$ verlegen und außerdem die Hyperebene $z_n = 0$ durch P hindurchgehen lassen. Dann wird P die Koordinaten $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ haben, wo

$$|a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 = p^2 > 0$$

ist, und die Hyperkugel wird durch die Gleichung

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = p^2$$

dargestellt. Als Bereich T darf man die Punkte (z) nehmen, deren Koordinaten an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\left|\begin{array}{l} |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > p^2, \\ |z_k - a_k| < h_k, \quad {\scriptstyle k=1,\ldots,n,} \quad (a_n = 0), \end{array}\right.$$

wo h_k eine geeignete positive Zahl bedeutet.

Der Einfachheit der Darstellung halber sei zunächst $n = 2$, $z_1 = x$, $z_2 = y$, $a_1 = a \neq 0$. Dann wird $p = |a|$, und T besteht aus den Punkten

$$|x|^2 + |y|^2 > |a|^2,$$

$$|y| < h_2, \qquad |x - a| < h_1.$$

---

1) Diesen Schritt kann man auch vermöge des Laurentschen Satzes begründen; vgl. Levis Beweis des entsprechenden Satzes von § 12.

2) Dieser Satz findet sich nicht bei Hartogs. Er ist dem entsprechenden Satze von Levi für den Fall $n = 2$ (§ 11, Zusatz) nachgebildet.

Wir nehmen K so an, daß

$$0 < K < h_2.$$

Dann liegt jeder Punkt (x, y), wofür

$$x = a, \qquad |y| = K$$

ist, in T, und darum verhält sich $f(x, y)$ in jedem dieser Punkte analytisch.

Wäre nun der Satz nicht richtig, so müßte es dem Hauptsatze dieses Paragraphen gemäß eine positive Zahl $h \leqq h_1$ geben, derart, daß, wenn $x^0 = a'$ ein beliebiger Punkt des Bereiches

(1) $$|x - a| < h$$

ist, die Funktion $f(x, y)$ sich unmöglich längs jedes Weges

L: $$y = te^{\theta i}, \quad 0 \leqq t \leqq K, \quad \theta = \text{const.}; \qquad x = a'$$

bis in den Punkt $(x, y) = (a', 0)$ analytisch fortsetzen läßt.

Hiermit sind wir aber zu einem Widerspruch geführt worden, indem wir nun a' im Kreise (1) nur so annehmen, daß

$$|a'| > |a|$$

wird. Denn jeder Punkt (x, y), wofür $x = a'$ und $|y| \leqq K$ ist, liegt ja in T, und in T ist $f(x, y)$ doch analytisch.

Im Falle $n > 2$ verläuft der Beweis parallel. Man nehme hier

$$0 < K < h_n$$

an. Dann ist $f(x, y)$ in jedem Punkte $(a_1, \ldots, a_{n-1}, y)$ analytisch, wofür $|y| = K$ ist. Jetzt setze man voraus, der Satz sei falsch, und ziehe man den Hauptsatz dieses Paragraphen heran. Hier treten an Stelle von (1) die $n - 1$ Ungleichungen

(2) $$|x_k - a_k| < h,$$

wo $0 < h \leqq h_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Als Punkt (x^0) wird man einen Punkt $(a_1', \ldots, a_{n-1}')$ wählen, wofür

$$|a_1'|^2 + \cdots + |a_{n-1}'|^2 > p^2,$$

$$|a_k' - a_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Dann wird jeder Punkt $(a_1', \ldots, a_{n-1}', y)$, wofür $|y| \leqq K$ ist, in T liegen, und somit ist $f(x, y)$ analytisch in all diesen Punkten. Dies widerspricht aber der Aussage jenes Hauptsatzes.

Bemerkung. Wir machen noch darauf aufmerksam, daß der entsprechende Satz, wobei die Hyperkugel durch eine Hyperebene ersetzt wird, nicht gilt. Sonst würde insbesondere eine Funktion $f(x, y)$, welche im Bereiche

$$T: \quad \begin{cases} \Re(x) > a \quad (a, \text{ reell und } > 0) \\ |x - a| < h, \quad |y| < h \end{cases}$$

analytisch ist, sich über die ganze Umgebung des Punktes $(x, y) = (a, 0)$ analytisch fortsetzen lassen. Sei f eine Funktion von x allein, welche sich im Bereiche

$$\Re(x) > a, \qquad |x - a| < h$$

analytisch verhält und die Kurve $\Re(x) = a$ zur natürlichen Grenze hat. Für diese Funktion ist der Satz falsch.

Aus den voraufgehenden Entwicklungen geht folgender Satz hervor. Sei $G(x, y)$ eine im Punkte (a, b) analytische, dort verschwindende, aber nicht identisch verschwindende Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y. Dann ist die reelle durch die Gleichung $G(x, y) = 0$ definierte Fläche des vier-dimensionalen Raumes der komplexen Veränderlichen (x, y) überall gleichsam negativer (oder wenigstens nicht positiver) Krümmung, da es keine durch (a, b) gehende Hyperkugel gibt, welche diesen Ort in der sonstigen Umgebung von (a, b) im Innern enthält.

§ 11. Ein Satz betreffend analytische Fortsetzung.

Satz.[1]) *Sei T ein endlicher Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes, dessen Rand aus einem einzigen Stücke besteht, und sei ferner $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche sich am Rande von T analytisch verhält. Dann läßt sich f durch analytische Fortsetzung zu einer im ganzen Bereiche T analytischen Funktion ergänzen.*

Der Voraussetzung des Satzes gemäß läßt sich der Rand, C, von T in einem $2n$-dimensionalen Bereiche $\mathfrak{T}$ einbetten, worin $f(z_1, \ldots, z_n)$ eindeutig ist und sich analytisch verhält. Mithin kann man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß T sich aus einer endlichen Anzahl von Hyperwürfeln zusammensetzt. Ist O ein nicht-spezialisierter innerer Punkt von T, so wird ein beliebiger von O ausgehender Strahl den Rand C in einer endlichen Anzahl von Punkten treffen. Seien $A_1 B_1, \ldots, A_k B_k$, wobei

1) Hartogs, a. a. O., S. 231.

$A_1 = O$ sein soll und A_i $(i > 0)$ zwischen O und B_i liegt, die verschiedenen Segmente dieses Strahles, welche in T liegen. Dann kann k zwar verschieden für verschiedene Strahlen ausfallen, doch wird k für die Gesamtheit der Strahlen endlich bleiben.

Wir wollen nun die vorgelegte Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ von jedem Punkte B_i aus nach A_i zu analytisch fortsetzen. Ich behaupte: der Punkt A_i ist auf diese Weise stets zu erreichen. Wäre dem nicht so, so zeichne man auf der Strecke $B_i A_i$ den Punkt (ζ) auf, welcher die analytische Fortsetzung hemmt. Und nun braucht man nur die kleinste Hyperkugel $\mathfrak{K}$ um O zu legen, welche diese Punkte (ζ) enthält. Sei P ein Punkt dieser Hyperfläche, welcher entweder selbst ein Punkt (ζ) oder aber eine Häufungsstelle solcher Punkte ist. Dann verhält sich $f(z_1, \ldots, z_n)$ in demjenigen Teile einer geeigneten Umgebung von P, welcher außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt, analytisch, gestattet aber keine analytische Fortsetzung über P hinaus ins Innere von $\mathfrak{K}$. Dies widerspricht dem Zusatze von § 10, und hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

Durch diese Fortsetzungen wird eine Funktion $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ im ganzen Innern von T eindeutig erklärt, und zwar verhält sich dieselbe überall in T analytisch, und stimmt am Rande von T mit der vorgelegten Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ überein. In der Tat kann man die Strecken $A_i B_i$ zu einem oder mehreren Bereichen $S_1, S_2, \ldots$ zusammenfassen, derart, daß ein von O ausgehender Strahl den Bereich S_k höchstens in einer der genannten Strecken trifft. Einer dieser Bereiche, S_1, stößt jedenfalls an den Punkt O. In S_1 verhält sich die Funktion nicht bloß analytisch, sie nimmt auch in allen Randpunkten von S_1, welche zugleich auch Randpunkte von T sind, dieselben Randwerte an, wie die vorgelegte Funktion.

Ist T hiermit noch nicht erschöpft, so gibt es einen zweiten Bereich, S_2, der ein $(2n-1)$-fach ausgedehntes Randstück mit S_1 gemein hat. Und nun erkennt man sofort, daß die Funktion $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ in S_2 eine analytische Fortsetzung derselben in S_1 ist, sowie daß sie in S_2 ebenso beschaffen ist wie in S_1.

Da die Bereiche S_k nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so werden sie schließlich alle angegliedert, und hiermit ist der Beweis erbracht.

Bemerkt sei noch, daß der Satz nicht zu gelten braucht, wenn T nicht endlich ist, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei T

der Bereich des Raumes der Funktionentheorie,

$$|x| \leqq 1, \qquad |y| \leqq \infty;$$

und sei

$$f(x, y) = \log \frac{x-a}{x-b}, \quad a \neq b, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1.$$

Ändert man dieses Beispiel dahin ab, daß man $|y| \leqq 1$ an Stelle von $|y| \leqq \infty$ setzt, so liegt nun der Punkt $(x, y) = (a, 1)$ am Rande, und die Bedingungen des Satzes sind also hier nicht mehr erfullt.

Ein weiterer Satz, welcher aus dem Zusatze von § 10 unmittelbar hervorgeht, und welcher übrigens dem letzten Levischen Theorem, § 13, entspricht, ist folgender.

Theorem. *Sei E eine abgeschlossene Punktmenge des $2n$-dimensionalen Raumes, und sei r die Entfernung eines beliebigen Punktes dieser Menge von einem festen Punkte O. In einem Punkte P von E habe r ein relatives Maximum. Sei ferner T ein Bereich, dessen Rand zum Teil oder ganz aus den Punkten von E besteht, in der Nähe von P aber keine nicht zu E gehörigen Randpunkte besitzt, und außerdem von der Fortsetzung der Strecke OP in der Nähe von P getroffen wird. Alsdann kann es keine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ geben, welche sich in T analytisch verhält und sich nicht über P hinaus analytisch fortsetzen läßt.*

§ 12. Von den Levischen Sätzen.

In diesem Paragraphen werden Sätze entwickelt, welche sowohl zum Beweise des Levischen Satzes von § 13 als auch bei einer Reihe anderer Untersuchungen Anwendung finden.[1])

Hilfssatz. *In einem Zylinderbereiche*

$$T: \qquad k \leqq |y| \leqq K, \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

sei eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_m, y) = f(x, y)$ analytisch, und man entwickle diese Funktion nach dem Laurentschen Satze:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x)\, y^n, \qquad g_n(x) = g_n(x_1, \ldots, x_m).$$

---

1) Die hier, sowie im folgenden Paragraphen, zur Sprache gebrachten Sätze und Methoden sind von E. E. Levi in einer wichtigen Abhandlung niedergelegt worden; *Annali di Matematica,* (3) 17 (1910) S. 61. Dabei beschränkt sich Levi auf den Fall $m = 1$.

Damit nun $f(x, y)$ eine analytische Fortsetzung gestatte, welche sich im Kreiszylinderbereiche

$$T_1: \qquad |y| \leqq K, \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

meromorph verhält, ist notwendig und hinreichend, daß es ein Funktionensystem $A_i(x) = A_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i=1,\ldots,l$, gibt, derart, daß die Relation

$$(1) \qquad g_{n-l}(x) + A_1(x) g_{n-l+1}(x) + \cdots + A_l(x) g_n(x) = 0$$

für alle negativen Werte von n: $n = -1, -2, \ldots$, besteht, wobei $A_i(x)$ im Bereiche

$$\mathfrak{H}: \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

analytisch ist.

Damit $f(x, y)$ die genannte Fortsetzung gestatte, reicht indessen hin[1]*, daß es ein Funktionensystem $A_i(x) = A_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i=0,1,\ldots,k$, gibt, derart, daß die Relation*

$$(2) \qquad A_0(x) g_{n-k}(x) + A_1(x) g_{n-k+1}(x) + \cdots + A_k(x) g_n(x) = 0$$

für alle negativen Werte von n: $n = -1, -2, \ldots$, besteht, wobei $A_i(x)$ im Bereiche $\mathfrak{H}$ analytisch ist und nicht alle A_i identisch verschwinden.

Die Richtigkeit des zweiten Teiles des Satzes erkennt man sofort, indem man die Funktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, y) = \varphi(x, y) = A_0 y^k + A_1 y^{k-1} + \cdots + A_k$$

bildet und das Produkt

$$\varphi(x, y) f(x, y) = \psi(x, y)$$

wieder nach dem Laurentschen Satze entwickelt. Dabei fallen die Glieder mit negativen Potenzen von y fort, so daß also ψ eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich T_1 hin gestattet. Und da nun $\varphi(x, y)$ sich ebenfalls in T_1 analytisch verhält, so ergibt die Darstellung

$$(3) \qquad f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

das erwünschte Resultat.

---

1) Diese Formulierung ist für die Anwendungen bequem. Dem Inhalt nach ist es ja egal, ob man die Bedingung in der Gestalt (1) oder (2) ansetzt.

Hiermit ist auch zugleich gezeigt, daß die Bedingung (1) hinreicht, denn diese subsumiert sich ja als ein besonderer Fall unter (2).

Um die Notwendigkeit der Bedingung (1) zu beweisen, sei (x^0, y_0) eine in T_1 belegene singuläre Stelle von $f(x, y)$. Dann läßt sich f in der Nähe dieser Stelle durch die Formel darstellen

$$f(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{4}$$

wobei P und Q sich beide in (x^0, y_0) analytisch verhalten und P dort verschwindet, und wo außerdem P und Q im Punkte (x^0, y_0) keinen gemeinsamen Teiler haben.

Ist nun

$$P(x^0, y) \not\equiv 0,$$

so läßt sich der Vorbereitungssatz auf $P(x, y)$ anwenden:

$$P(x, y) = G(x, y)\,\Omega(x, y),$$

$$G(x, y) = (y - y_0)^\mu + C_1(y - y_0)^{\mu-1} + \cdots + C_\mu,$$

und da hier

$$P(x^0, y) = (y - y_0)^\mu\,\Omega(x^0, y), \qquad \Omega(x^0, y_0) \neq 0$$

ist, so gibt es keinen zweiten Punkt y' der Umgebung von y_0, wofür (x^0, y') eine singuläre Stelle von $f(x, y)$ wäre.

Jetzt behaupte ich: Die Funktion $P(x^0, y)$ verschwindet nicht identisch. Im anderen Falle würde es nämlich einen ganzen den Punkt y_0 umfassenden Bereich τ des Kreises

$$\mathfrak{K}: \qquad |y| \leqq K$$

geben, derart, daß, wenn y ein beliebiger Punkt von τ ist, der Punkt (x^0, y) zu einer singulären Stelle von f wird.

Diesen Bereich τ lasse man nun wachsen. Er kann den ganzen Kreis $\mathfrak{K}$ nicht ausfüllen, denn f verhält sich ja analytisch, wenn y im Ringe $k \leqq |y| \leqq K$ und (x) beliebig in $\mathfrak{H}$ liegt. Sei also y_1 ein Grenzpunkt, worüber τ sich nicht hinaus dehnen kann. Setzt man nun die Relation (4) für den Punkt (x^0, y_1) an:

$$f(x, y) = \frac{Q_1(x, y)}{P_1(x, y)},$$

so führt sowohl die Annahme: $P_1(x^0, y) \equiv 0$, als auch die andere: $P_1(x^0, y) \not\equiv 0$ direkt zu einem Widerspruch.

Hiermit haben wir also das Resultat erreicht, daß die Punkte y_0 von $\mathfrak{K}$, welche mit einer vorgegebenen Stelle (x^0) von $\mathfrak{H}$ zusammengenommen singuläre Stellen (x^0, y_0) von $f(x, y)$ liefern, eine im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{K}$ isolierte, und darum auch endliche Menge bilden. Im übrigen liegen diese Punkte y_0 alle schon im Kreise

$$\mathfrak{K}': \qquad |y| \leqq k.$$

Sind außerwesentliche singuläre Stellen zweiter Art vorhanden, so liegt jeder zu einer davon führende Punkt (x^0) auf einer $(2m-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit[1]) $\mathfrak{M}$ des Bereiches $\mathfrak{H}$; vgl. § 1. Sei (x^0) ein Punkt von $\mathfrak{H}$, welcher nicht auf $\mathfrak{M}$ liegt, und sei l die Anzahl der im Kreise $\mathfrak{K}$ belegenen Pole y_0, jeden mit der gehörigen Multiplizität gezählt. Sodann erkennt man, indem man den Vorbereitungssatz auf den Nenner $P(x, y)$ von (4) anwendet, daß l für alle anderen Punkte einer gewissen Nachbarschaft von (x^0) den gleichen Wert beibehält. Demgemäß ist aber l auch im ganzen Bereiche $\mathfrak{H}$ exklusive der Punkte von $\mathfrak{M}$ konstant.

Wir bezeichnen nun die zum Punkte (x^0) gehörigen Werte y_0 mit $y_1, \ldots, y_l$ und bilden die Summe

$$y_1^s + \cdots + y_l^s = \mathrm{X}_s(x_1, \ldots, x_m).$$

Letztere Funktion ist eindeutig im Bereiche $\mathfrak{H}$ exklusive der Menge $\mathfrak{M}$, und verhält sich dort analytisch. Im übrigen bleibt sie endlich in den Punkten von $\mathfrak{M}$. Nach dem ersten Satze von § 5 hat sie also nur hebbare Unstetigkeiten in $\mathfrak{M}$ und läßt sich somit zu einer in $\mathfrak{H}$ ausnahmslos analytischen Funktion ergänzen.

Daraus ergibt sich, daß die Größen $y_1, \ldots, y_l$ Wurzeln einer Gleichung

$$\varphi(x, y) = y^l + A_1 y^{l-1} + \cdots + A_l = 0$$

sind, wobei $A_k(x) = A_k(x_1, \ldots, x_m)$ sich in $\mathfrak{H}$ analytisch verhält.

Bildet man nun die Funktion

$$\varphi(x, y)\, f(x, y) = \psi(x, y)$$

und nimmt man (x) in $\mathfrak{H}$ willkürlich an, so weist $\psi(x, y)$, als Funktion von y allein betrachtet, nur hebbare Unstetigkeiten in

---

1) Im Falle $m = 1$ reduziert sich $\mathfrak{M}$ auf eine endliche Anzahl von Punkten.

$\mathfrak{K}$ auf. Mithin läßt sich $\psi(x, y)$ in jedem Punkte (x, y), wo $f(x, y)$ definiert ist, durch die Integralformel darstellen:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(x, \eta) f(x, \eta)}{\eta - y} d\eta .$$

Dabei wird das Integral über einen Kreis C: $|y| = K + \varepsilon$, hinerstreckt, wo ε eine geeignete positive Zahl bedeutet. Die rechter Hand stehende Funktion verhält sich aber analytisch in jedem Punkte von T_1, und hiermit ist nun der Beweis erbracht.

Meromorphe Fortsetzung. Die nachstehenden Sätze lassen sich bequemer aussprechen, wenn es uns gestattet wird, den Begriff der meromorphen Fortsetzung einzuführen. Sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ meromorph, und sei L eine einfache reguläre von L ausgehende Kurve. Läßt sich L in einem solchen $2n$-dimensionalen Röhrchen R einbetten, daß sich die analytische Fortsetzung von f im Innern von R überall dort meromorph verhält, so sagen wir, f gestattet *meromorphe Fortsetzung* längs L. Wie die Definition auf den Fall, daß L sich schneidet, auszudehnen ist, liegt nun auf der Hand.

Wir sind jetzt in der Lage, Levis Übertragung des Hartogsschen Satzes von § 10 auf den meromorphen Fall zu begründen. Dabei erteilen wir dem Satze zugleich eine allgemeinere Formulierung und sprechen ihn auch für den Fall von $m + 1$ Argumenten aus.

Satz.[1]) *Sei $f(x_1, \ldots, x_m, y) = f(x, y)$ eine Funktion, welche sich in jedem Punkte der Menge*

$$\Sigma: \qquad |y| = K, \qquad 0 < K, \qquad x_i = a_i, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,m,}$$

meromorph, in einem Teile dieser Punkte aber analytisch[2]) *verhält, und sich längs keines der Wege*

$$L: \qquad y = te^{\alpha i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K, \qquad x_i = a_i, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,m,}$$

bis in den Punkt $(x, y) = (a, 0)$ meromorph fortsetzen läßt.

Alsdann gibt es einen Bereich

$$\mathfrak{H}: \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,m,}$$

---

1) Der erweiterte Satz von § 15 stellt im wesentlichen eine andere Formulierung dieses Satzes vor.

2) Daß diese letzte Bedingung nicht aus der ersten hervorgeht, zeigt das Beispiel: $f(x, y) = 1/\varphi(x)$, wo φ im Anfang irreduktibel ist.

derart, daß $f(x, y)$ sich in jedem Punkte (x, y), wo (x) in $\mathfrak{H}$ liegt und $|y| = K$ ist, meromorph verhält, während andererseits jedem Punkte (x^0) von $\mathfrak{H}$ ein Punkt $y_0 = \varrho e^{\theta i}$, $0 \leqq \varrho < K$ entspricht, wofür $f(x, y)$ längs der Strecke

$$L_0: \qquad y = te^{\theta i}, \qquad \varrho < t \leqq K, \qquad x_i = x_i^0, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,m,}$$

bis in jede Nachbarschaft der Stelle (x^0, y_0) hinein meromorph fortgesetzt werden kann, ohne jedoch diesen Punkt selbst zu erreichen.

Sei $y_1 = Ke^{\theta i}$ ein beliebiger Punkt des Kreises $|y| = K$. Ist $(x, y) = (a, y_1)$ eine singuläre Stelle von $f(x, y)$, so läßt sich f in der Nähe von (a, y_1) in der Form darstellen:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

wo φ und ψ im Punkte (a, y_1) teilerfremd gegeneinander sind. Im Falle

$$\varphi(a, y) \not\equiv 0$$

ist, beweist man mit Hilfe des Vorbereitungssatzes geradeso wie vorhin, daß es keinen zweiten Punkt y' der Umgebung von y_1 gibt, wofür (a, y') ein singulärer Punkt von $f(x, y)$ wäre.

Wäre dagegen $\varphi(a, y) \equiv 0$, so müßte auch jeder Punkt (a, y), $|y| = K$, eine singuläre Stelle von $f(x, y)$ sein, und dies verstößt eben gegen die Voraussetzung.

Hiermit hat sich ergeben, daß höchstens eine endliche Anzahl singulärer Punkte (a, y), wo $K - \varepsilon < |y| < K + \varepsilon$ ist, vorhanden sein können. Indem wir nun K nötigenfalls durch eine etwas größere Zahl K_1 ersetzen, wird sich f in jedem Punkte $(a, K_1 e^{\theta i})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, analytisch verhalten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß dies schon für die ursprüngliche Größe K zutrifft.

Demgemäß gibt es einen Bereich

$$\mathfrak{H}: \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,m,}$$

derart, daß, wenn (x^0) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}$ und $|y'| = K$ ist, $f(x, y)$ sich nicht bloß meromorph, sondern sogar analytisch im Punkte (x^0, y') verhält.

Wäre nun der Satz nicht richtig, so müßte es einen Punkt

(x^0) von $\mathfrak{H}$ geben, wofür die Funktion $f(x, y)$ sich längs jedes Weges

$$y = te^{\theta i}, \quad 0 \leqq t \leqq K, \quad \theta = \text{const.}, \quad x_i = x_i^0, \quad i=1,\ldots,m,$$

bis in den Punkt $(x, y) = (x^0, 0)$ meromorph fortsetzen läßt. Durch diese Fortsetzungen wird aber $f(x, y)$ zu einer Funktion erweitert — wir betrachten f nämlich zuerst bloß in der Umgebung der Menge Σ —, welche sich in einem Bereiche

$$|y| \leqq K, \quad |x_i - x_i^0| \leqq \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

wo $0 < \varepsilon_i < h_i - |x_i^0 - a_i|$ ist, meromorph und außerdem in den Punkten (x^0, y) davon, wofür $|y| = K$ ist, analytisch verhält.

Hiermit sind nun alle Bedingungen des ersten Teiles des Hilfssatzes für einen Bereich

$$T: \qquad k \leqq |y| \leqq K, \qquad |x_i - x_i^0| \leqq \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

erfüllt, und darum muß es, der Laurentschen Entwicklung um den Punkt $(x, y) = (x^0, 0)$:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(x)\, y^n, \tag{1}$$

entsprechend, l im Bereiche

$$\mathfrak{H}: \qquad |x_i - x_i^0| \leqq \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

analytische Funktionen $\alpha_j(x)$ geben, derart, daß die Gleichung

$$\gamma_{n-l}(x) + \alpha_1(x)\gamma_{n-l+1}(x) + \cdots + \alpha_l(x)\,\gamma_n(x) = 0 \tag{2}$$

für alle Werte $n = -1, -2, \ldots$ besteht.

Andererseits werde $f(x, y)$ um den Punkt $(x, y) = (a, 0)$ nach dem Laurentschen Satze entwickelt:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x)\, y^n. \tag{3}$$

Da die Entwicklungen (1) und (3) übereinstimmen, wenn (x) in $\mathfrak{H}$ liegt und $|y| = K$ ist, so folgt hieraus, daß identisch

$$g_n(x) = \gamma_n(x), \qquad -\infty < n < \infty.$$

Jetzt erkennt man, daß auch die unendlich vielen Gleichungen in den Unbekannten $\xi_0, \ldots, \xi_l$

$$\xi_0\, g_{n-l}(x) + \xi_1\, g_{n-l+1}(x) + \cdots + \xi_l\, g_n(x) = 0, \quad n=-1,-2,\ldots, \tag{4}$$

deren Koeffizienten $g_{-1}(x), g_{-2}(x), \ldots$ sich im Bereiche $\mathfrak{H}$ analytisch verhalten, zunächst im Bereiche $\overline{\mathfrak{H}}$ eine von der identischen verschiedene Lösung zulassen. Aus der Theorie der linearen Abhängigkeit[1]) folgt dann weiter, daß es $l+1$ in $\mathfrak{H}$ analytische nicht alle identisch verschwindende Funktionen $A_i(x)$ gibt, derart, daß in allen Punkten von $\mathfrak{H}$ die Gleichung besteht:

$$(5) \qquad A_0(x) g_{n-l}(x) + A_1(x) g_{n-l+1}(x) + \cdots + A_l(x) g_n(x) = 0.$$

Nach dem zweiten Teile des Hilfssatzes gestattet somit die Funktion $f(x, y)$ eine meromorphe Fortsetzung über den ganzen Bereich

$$T_1: \qquad |y| \leqq K, \qquad |x_i - a_i| \leqq h_i, \qquad i=1, \ldots, m,$$

und hiermit ist man zu einem Widerspruch geführt worden.

Der Fall $m=1$. Im Falle $m=1$ besteht ein allgemeinerer Satz, indem man die Bedingung fallen läßt, wonach $f(x, y)$ in einem Teile der Punkte von Σ sich analytisch verhalten soll. Sollte nämlich in diesem Falle

$$\varphi(a, y) \equiv 0,$$

so ergibt der erweiterte Weierstraßsche Vorbereitungssatz, daß

$$\varphi(x, y) = (x-a)^\mu \varphi_1(x, y), \qquad \varphi_1(a, y) \not\equiv 0.$$

Indem man nun

$$f_1(x, y) = (x-a)^\mu f(x, y)$$

setzt, erfüllt die Funktion f_1 schon die bewußte Bedingung. Hieraus erkennt man aber sofort die Richtigkeit des erweiterten Satzes.

Zusatz. *Sei P ein Randpunkt einer Hyperkugel $\mathfrak{K}$ und sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche sich in dem außerhalb $\mathfrak{K}$ belegenen Teile T der Umgebung von P meromorph verhält. Dann läßt sich f am Punkte P über T hinaus ins Innere von $\mathfrak{K}$ meromorph fortsetzen.*

Wir wollen den Punkt P in den Anfang und den Mittelpunkt O von $\mathfrak{K}$ nach dem Punkte $(-a, 0, \ldots, 0)$ verlegen, wobei a reell

1) Vgl. Bôcher, *Algebra*, Kap. III, IV.

und positiv sei. Dann ist a gleich dem Radius R von $\mathfrak{K}$. Im übrigen setzen wir

$$z_n = y, \qquad z_k = x_k, \qquad k=1,\ldots,m=n-1,$$

$$f(z_1,\ldots,z_n) = f(x,y).$$

Fur eine geeignete positive Zahl K sind nun alle Bedingungen des vorstehenden Theorems, höchstens bis auf eine, erfüllt. Es könnte nämlich $f(x,y)$ denkbarerweise in jedem Punkte $(0,y)$, $|y| = K$, eine singuläre Stelle haben.

Dem können wir aber durch folgende Transformation abhelfen:

$$x_k = x'_k + \gamma_k y^2, \qquad k=1,\ldots,m, \tag{6}$$

wobei die γ_k in zweckmäßiger Weise einzuschränken sind. Sei

$$x_k = \xi_k + i\eta_k, \qquad x'_k = \xi'_k + i\eta'_k, \qquad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \qquad k=1,\ldots,m,$$

$$y = y_1 + iy_2.$$

Die inneren und Randpunkte von $\mathfrak{K}$ werden an die Beziehung geknüpft:

$$(\xi_1 + a)^2 + \eta_1^2 + \sum_{k=2}^{m}(\xi_k^2 + \eta_k^2) + y_1^2 + y_2^2 \leqq a^2,$$

oder auch, indem wir

$$\sum_{k=1}^{m}(\xi_k^2 + \eta_k^2) = \varrho^2$$

setzen,

$$2a\xi_1 + \varrho^2 + y_1^2 + y_2^2 \leqq 0. \tag{7}$$

Durch (6) gehen dieselben in Punkte (x', y) über, welche der folgenden Ungleichung genügen:

$$2a\xi'_1 + \varrho'^2 + \varphi_2 + \varphi_3 \leqq 0, \tag{8}$$

wo

$$\varphi_2 = (1 + 2a\alpha_1)y_1^2 - 4a\beta_1 y_1 y_2 + (1 - 2a\alpha_1)y_2^2$$

ist, und wo φ_3 ein Polynom bedeutet, welches keine Glieder von niederem als dem 3. Grade enthält.

Ich behaupte nun: Es gibt eine positive Zahl ε, eine Umgebung τ von P, und eine Hyperkugel

$$\mathfrak{K}': \qquad 2a'\xi'_1 + \varrho'^2 + y_1^2 + y_2^2 \leqq 0$$

derart, daß, für jede an die Bedingungen

$$|\gamma_k| < \varepsilon, \qquad k=1,\ldots,m,$$

geknüpfte Wahl der Koeffizienten γ_k, alle im Innern oder am Rande von $\mathfrak{K}$ und zugleich auch in τ gelegenen Punkte (x, y) in Punkte (x', y) übergehen, welche im Innern oder am Rande von $\mathfrak{K}'$ liegen.

Zum Beweise nehmen wir eine reelle Zahl $\lambda > 1$, sowie eine positive Zahl ε an, verlangen nun, daß

$$|\gamma_k| < \varepsilon, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

sei, und versuchen dann, der Ungleichung

$$\frac{\varrho'^2 + y_1^2 + y_2^2}{\lambda} \leqq \varrho'^2 + \varphi_2 + \varphi_3 \tag{9}$$

für alle Punkte einer bestimmten Umgebung τ' von P zu genügen. Gelingt uns das, so folgt dann aus (9), daß im Bereiche τ'

$$2a\xi_1' + \frac{\varrho'^2 + y_1^2 + y_2^2}{\lambda} \leqq 2a\xi_1' + \varrho'^2 + \varphi_2 + \varphi_3$$

ist. Demgemäß werden solche Punkte von τ', welche der Relation (8) genügen und daher inneren oder Randpunkten von $\mathfrak{K}$ entsprechen, auch an die Bedingung

$$2\lambda a\xi_1' + \varrho'^2 + y_1^2 + y_2^2 \leqq 0$$

geknüpft sein und somit im Innern oder am Rande einer Hyperkugel $\mathfrak{K}'$ vom Radius $a' = \lambda a$ liegen. Das Abbild von τ' wird eben der in Aussicht genommene Bereich τ sein.

Die Bestimmung eines der Relation (9) entsprechenden Bereiches τ' geschieht nun, wie folgt. Wir können zunächst (9) in der Form umschreiben:

$$-\varphi_3 \leqq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\varrho'^2 + \psi_2, \tag{10}$$

wo

$$\psi_2 = \left(1 - \frac{1}{\lambda} + 2a\alpha_1\right)y_1^2 - 4a\beta_1 y_1 y_2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda} - 2a\alpha_1\right)y_2^2$$

gesetzt ist. Indem wir λ genügend groß und ε genügend klein wählen, können wir erzielen, daß

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda} - 2a\varepsilon\right)y_1^2 - 4a\varepsilon y_1 y_2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda} - 2a\varepsilon\right)y_2^2$$

eine positive definite quadratische Form wird. Sei

$$\Psi_2 = \left(1 - \frac{1}{\lambda} - 2a\varepsilon\right)|y_1|^2 - 4a\varepsilon\,|y_1|\,|y_2| + \left(1 - \frac{1}{\lambda} - 2a\varepsilon\right)|y_2|^2.$$

Dann wird

$$\Psi_2 \leqq \psi_2$$

sein. Die Relation

$$-\varphi_3 \leqq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\varrho'^2 + \Psi_2$$

hat aber offenbar für eine gewisse Umgebung τ' von P statt, sofern ε genügend klein und die γ_k, der Bedingung $|\gamma_k| < \varepsilon$ gemäß, gewählt werden. Hiermit ist denn die Relation (10), und somit auch (9) erzielt.

Jetzt ist nur noch ein kurzer Schritt zur Vollendung des Beweises. Wir schränken τ nötigenfalls ferner noch so ein, daß der außerhalb $\mathfrak{K}$ belegene Teil von τ in T liegt. Sodann bestimmen wir K so, daß alle Punkte $(0, y)$, wofür $0 < |y| \leqq K$ ist, in τ liegen.

Sei η ein Punkt des Kreises $|y| = K$. Dann läßt sich $f(x, y)$ in der Nähe des Punktes $(0, \eta)$ durch die Formel darstellen:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

wobei φ und ψ sich beide im Punkte $(0, \eta)$ analytisch verhalten und außerdem — dies ist ja der Fall, der uns die ganze Schwierigkeit gemacht hat —

$$\varphi(0, y) \equiv 0.$$

Wir entwickeln jetzt φ nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$\varphi(x, y) = \varphi_\mu(x)(y-\eta)^\mu + \varphi_{\mu+1}(x)(y-\eta)^{\mu+1} + \cdots,$$

$$\varphi_\mu(x) \not\equiv 0, \qquad 0 \leqq \mu.$$

Der Bereich

$$|y-\eta| < h, \qquad |x_k| < h, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,m,}$$

werde so gewählt, daß die Reihe in demselben konvergiert, und daß er außerdem in τ liegt.

Sei $(c) = (c_1, \ldots, c_m)$ ein Punkt des Bereiches $|x_k| < h$, wofür

$$\varphi_\mu(c) = \varphi_\mu(c_1, \ldots, c_m) \neq 0$$

ist, und sei außerdem noch

$$|c_k| < \varepsilon K^2, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,m.}$$

Indem wir nun

$$\gamma_k = \frac{c_k}{\eta^2}$$

setzen, geht die Funktion

$$\varphi_\mu(x) + \varphi_{\mu+1}(x)(y-\eta) + \cdots$$

in eine Funktion $\omega(x', y)$ über, welche im Punkte $(x', y) = (0, \eta)$ nicht verschwindet, denn es ist

$$\omega(0 . \eta) = \varphi_\mu(\gamma_1 \eta^2, \ldots, \gamma_m \eta^2) = \varphi_\mu(c).$$

Demgemäß wird auch $\varphi(x, y)$ in eine Funktion $\varphi'(x', y)$ transformiert, derart, daß

$$\varphi'(0, y) \not\equiv 0$$

wird.

Da nun die Funktion $f'(x', y)$, wo

$$f'(x', y) = f(x, y),$$

über den Anfang hinaus meromorph fortgesetzt werden kann, so gilt dies auch von $f(x, y)$, und hiermit ist der Beweis vollständig erbracht.

Definition. Als *wesentliche singuläre Stelle* einer eindeutigen monogenen analytischen Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ wird jeder singuläre Punkt derselben bezeichnet, worin sich die Funktion nicht meromorph verhält.[1])

Ist die Funktion dagegen mehrdeutig, so kann es vorkommen, *i*) daß sich dieselbe längs einer einfachen Kurve L mit dem einen Endpunkte (a) bis in jede Umgebung von (a) meromorph fortsetzen läßt, ohne (a) indessen jemals zu erreichen; und ferner, *ii*) daß sich eine Hyperkugel $\mathfrak{K}$ um (a) von folgender Beschaffenheit legen läßt. Sei L_1 der Bogen von L, welcher den einen Endpunkt in (a), den anderen am Rande von $\mathfrak{K}$ hat und sonst ganz in $\mathfrak{K}$ liegt. Sei ferner $\mathfrak{f}(z_1, \ldots, z_n)$ ein Funktionselement, welches einer meromorphen Fortsetzung längs L in einen innerhalb $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt von L_1 entspricht. Und nun sollen alle Fortsetzungen von $\mathfrak{f}$ längs in $\mathfrak{K}$ gelegener Wege nur zu einer eindeuti-

1) Weierstraß, *Funktionenlehre,* S. 130 = *Werke,* Bd. 2, S. 156. Auf mehrdeutige Funktionen wird die Definition daselbst nicht ausgedehnt. Im übrigen werde die Annahme ausdrücklich betont, daß es in jeder Umgebung einer singulären Stelle Punkte des Definitionsbereiches der Funktion geben muß.

gen Funktion führen. Dann wird (a) als eine *wesentliche singuläre Stelle* des der Kurve L entsprechenden Zweiges von f benannt.

Im übrigen braucht L im Punkte (a) nicht regulär zu sein. Dann soll aber jeder nicht bis an (a) hin reichende Bogen von L regulär sein, und außerdem sollen die Punkte von L keine Häufungsstelle außer (a) haben, welche nicht auf L liegt.

Die Definitionen gelten auch im Falle $n = 1$.

§ 13. Levis Satz betreffend meromorphe Fortsetzung.

Den Satz von § 11 hat Levi auf den Fall meromorphen Verhaltens ausgedehnt.

Der Levische Satz.[1]) *Sei T ein endlicher Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes, dessen Rand aus einem einzigen Stücke besteht, und sei ferner $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche sich am Rande von T meromorph verhält. Dann läßt sich f durch analytische Fortsetzung zu einer im ganzen Bereiche T meromorphen Funktion ergänzen.*

Der Beweis gestaltet sich geradeso, wie im analogen Falle, § 11, indem man dort die in Betracht kommenden analytischen Fortsetzungen jetzt durch meromorphe Fortsetzungen ersetzt.

Ein weiterer, dem letzten Theorem von § 11 analoger Satz, welcher sich aus dem Zusatze von § 12 unmittelbar ergibt, ist folgender.

Theorem.[2]) *Sei E eine abgeschlossene Punktmenge des $2n$-dimensionalen Raumes, und sei r die Entfernung eines beliebigen Punktes dieser Menge von einem festen Punkte O. In einem Punkte P von E habe r ein relatives Maximum.*

Sei ferner T ein Bereich, dessen Rand zum Teil oder ganz aus den Punkten von E besteht, in der Nähe von P aber keine nicht zu E gehörigen Randpunkte besitzt, und außerdem von der Fortsetzung der Strecke OP in der Nähe von P getroffen wird.

Alsdann kann es keine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ geben, welche sich in T meromorph verhält und in P eine wesentliche singuläre Stelle besitzt.

---

1) Levi, a. a. O., S. 71.
2) Levi, a. a. O., S. 71.

Insbesondere bürgen diese Sätze dafür, daß der Bereich T, in welchem sich eine monogene analytische Funktion mehrerer Argumente resp. ein Zweig einer mehrdeutigen analytischen Funktion meromorph verhält, nicht zum Teil von einem Randstück R begrenzt werden kann, welches in einer im Endlichen geschlossenen Hyperoberfläche $\mathfrak{S}$ eingeschlossen werden kann, wobei jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ im Innern von T liegt.

Widerlegung eines Weierstraßschen Satzes. Ist T ein beliebiges Kontinuum der z-Ebene, so gibt es bekanntlich Funktionen, welche sich in jedem Punkte von T analytisch verhalten, sich aber nirgends über den Rand von T hinaus analytisch fortsetzen lassen: vgl. Bd. I, Kap. 11, § 13. Mit anderen Worten, decken sich die Definitonsbereiche der eindeutigen monogenen analytischen Funktionen einer Variabelen genau mit den Kontinuen der z-Ebene.

Daß ein entsprechender Satz für Funktionen mehrerer Argumente nicht statt hat, erhellt schon daraus, daß selbst eine monogene analytische Funktion zweier Variabelen keine isolierte singuläre Stelle haben kann; vgl. §§ 3, 4.

Es wäre indessen denkbar, daß der Satz eine Verallgemeinerung zuließe, indem man das Wort *analytisch* durch *meromorph* ersetzt. Und dies hat Weierstraß[1]) auch wirklich geglaubt. Nach ihm soll folgendes Theorem gelten: Sei T ein beliebiges Kontinuum des $2n$-dimensionalen Raumes der komplexen Variabelen $(z_1, \ldots, z_n)$. Dann gibt es stets eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, welche meromorph[2]) in T ist, sich aber nirgends über den Rand von T hinaus meromorph fortsetzen läßt. Dieser Satz ist indessen falsch, wie aus den vorstehenden Sätzen unmittelbar erhellt.[3])

Aus dem Satze von § 10 ergibt sich unmittelbar, daß eine Funktion mehrerer Argumente niemals eine isolierte wesentliche singuläre Stelle besitzen kann, und hiermit ist schon eine einfachere Widerlegung des Weierstraßschen Satzes geliefert.

---

1) Weierstraß, *Journ. f. Math.*, Bd. 89 (1880) S. 5 = *Werke*, Bd. 2, S. 129.

2) Diese Forderung setzt ja die Eindeutigkeit der Funktion in allen Punkten von T, wo sie definiert ist, voraus.

3) Dieser Beweis für die Unrichtigkeit des Weierstraßschen Satzes rührt von Levi her (a. a. O., S. 71), und ist wohl der erste, welcher veröffentlicht wurde. Vgl. aber auch eine Bemerkung von Hartogs, *Math. Annalen*, Bd. 70 (1911) S. 222.

§ 14. Von Levis Randbedingung.

Wir wollen noch über eine von Levi[1]) erhaltene Bedingung berichten, wonach eine Hyperfläche

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \tag{1}$$

des Raumes der Variabelen $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ eine natürliche Grenze für eine analytische Funktion $f(x, y)$ bilden kann. Sei

$$\mathfrak{C}(\varphi) = \Delta_2' \varphi \Delta_1'' \varphi + \Delta_2'' \varphi \Delta_1' \varphi - 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\right)$$
$$- 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right),$$

wobei

$$\Delta_1' \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2, \qquad \Delta_2' \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2},$$

und $\Delta_1'' \varphi$, $\Delta_2'' \varphi$ ähnliche Ausdrücke in y_1, y_2 bedeuten. Wird nun die Funktion $f(x, y)$ an derjenigen Seite von (1) betrachtet, wo $\varphi > 0$ ist, und soll (1) eine natürliche Grenze für f vorstellen, so besteht eine notwendige Bedingung hierfür darin, daß in jedem Punkte von (1) die Relation

$$\mathfrak{C}(\varphi) \leqq 0$$

statt habe.

Ist dagegen $\varphi < 0$ an der Seite von (1), wo $f(x, y)$ betrachtet wird, so muß in jedem Punkte von (1) $\mathfrak{C}(\varphi) \geqq 0$ sein.

Im allgemeinen wird $\mathfrak{C}(\varphi)$ in einem Punkte P von (1) nicht verschwinden, und dann wird $\mathfrak{C}(\varphi)$ in der ganzen Umgebung von P das gleiche Vorzeichen beibehalten. Infolgedessen wird die vorstehende Bedingung an der einen Seite von (1) nicht erfüllt, und darum kann keine Funktion $f(x, y)$ sich in diesem Raume meromorph verhalten, ohne sich dabei über (1) hinaus analytisch fortsetzen zu lassen.

Daß die Bedingung $\mathfrak{C}(\varphi) = 0$ resp. $\mathfrak{C}(\varphi) > 0$ in den Punkten von (1) hinreicht, wird auch gezeigt.[2])

---

1) Levi, a. a. O., S. 80. Vgl. auch *Madison Colloquium*, S. 177.

2) Letzterer Satz wird in einem zweiten Aufsatze bewiesen, Levi, *Annali di Matematica*, (3) 18 (1911) S. 69.

§ 15. Über hebbare Singularitäten in bezug auf meromorphe Fortsetzung.

In den Rahmen der Entwicklungen dieses Kapitels gehört auch ein Satz, welcher zuerst von Hartogs[1]) bewiesen ist. Wir wollen ihn zunächst in einer beschränkten Formulierung aussprechen, welche jedoch für die Praxis häufig die geeignetste ist. Im übrigen haben die Sätze dieses Paragraphen große Ähnlichkeit mit dem 2. Hauptsatz von § 4 und dem 2. Satze von § 5, nebst deren Verallgemeinerungen.

Satz. *Im Innern eines Bereiches T des $2n$-dimensionalen Raumes sei eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ im allgemeinen meromorph.*[2]) *Dabei mögen die inneren Punkte Q von T, wofür dieses Verhalten nicht vorausgesetzt wird, auf analytischen Gebilden $(n-2)$-ter Stufe liegen, welche sich in der Umgebung keines inneren Punktes von T häufen. Dann verhält sich $f(z_1, \ldots, z_n)$, höchstens von hebbaren Unstetigkeiten abgesehen, ausnahmslos meromorph im Innern von T.*

Den Beweis wollen wir vermöge der Levischen Methoden und im Anschluß an die Schlußweise von § 4 führen. Sei Q ein beliebiger der Ausnahmepunkte. Dann verlegen wir den Anfang in Q und nehmen die Koordinatenachsen außerdem so an, daß die transformierte Funktion

$$f(z_1, \ldots, z_n) = F(w, z, x_1, \ldots, x_m), \qquad m = n-2,$$

vor allem sich in einem Punkte $(w, z, x) = (c, 0, 0)$, $c \neq 0$, analytisch, in jedem Punkte $(w, 0, 0)$, $|w| = |c|$, aber wenigstens meromorph verhält.

Die Möglichkeit einer solchen Transformation erkennt man, wie folgt. Zunächst werde g so bestimmt, daß der Bereich

$$|z_k| < g, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

in T liegt. Sollte nun insbesondere der Punkt $(c, 0, \ldots, 0)$, $c = \frac{1}{2}g$, ein singulärer Punkt von $f(z_1, \ldots, z_n)$ sein, so kann man

1) *Math. Annalen*, Bd. 70 (1911) S. 207. Kistler hatte den Satz in seiner Dissertation, 1905 (vgl. S. 30) bereits ausgesprochen. Sein Beweis beruht aber auf einem gründlichen Mißverständnisse der Cousinschen Sätze, so daß man also wohl daran zweifeln kann, ob er irgendeinen stichhaltigen Grund hatte, an die Richtigkeit des Satzes zu glauben.

2) Nach Definition bringt diese Forderung bereits die Eindeutigkeit der Funktion in allen Punkten, wo sie erklärt ist, mit sich.

ja in beliebiger Nähe dieses Punktes einen zweiten Punkt

$$(c + \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), \qquad |\gamma_k| < \varepsilon, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,n,}$$

finden, in welchem die Funktion sich analytisch verhält. Alsdann genügt es, die Transformation auszuüben:

$$z_1 = \left(1 + \frac{\gamma_1}{c}\right) w, \quad z_2 = \frac{\gamma_2}{c} w + z, \quad z_k = \frac{\gamma_k}{c} w + x_{k-2}, \quad {\scriptstyle k=3,\ldots,n,}$$

um eine Funktion $f = F(w, z, x)$ zu erhalten, welche sich im Punkte $(w, z, x) = (c, 0, 0)$ analytisch verhält. Im übrigen liegt der Bereich

$$|w| < p, \qquad |z| < q, \qquad |x_k| < h_k, \quad {\scriptstyle k=1,\ldots,m;} \qquad c < p < g,$$

bei passender Wahl von ε, q, h_k im transformierten Bereiche T'.

Ist (γ^0) eine besondere Bestimmung der Koeffizienten, welche den bewußten Bedingungen genügt, so wird jeder Punkt (γ) einer geeigneten Umgebung von (γ^0) auch eine solche zulässige Bestimmung liefern. Bei nicht-spezialisierter Wahl von (γ) und geeigneter Einschränkung der h_k lassen sich die Koordinaten (w', z', x) jedes in einer gewissen Umgebung des Anfangs belegenen Ausnahmepunktes, wie folgt, darstellen. Erstens ist w' Wurzel einer ausgezeichneten pseudoalgebraischen Gleichung

$$w^\mu + A_1 w^{\mu-1} + \cdots + A_\mu = 0,$$

deren Koeffizienten $A_k = A_k(x_1, \ldots, x_m)$ sich im Bereiche

$$\mathfrak{H}: \qquad |x_k| < h_k, \qquad {\scriptstyle k=1,\ldots,m,}$$

analytisch verhalten und deren Spitze im Anfange liegt, und zweitens ist z' der Wert einer an diesem Gebilde eindeutigen stetigen im Anfange verschwindenden Funktion. Mithin genügt z' einer Gleichung vom nämlichen Typus. Insbesondere werden bei eventueller weiterer Einschränkung der h_k alle diese Größen w', z' an die Relationen

$$|w'| < p, \qquad |z'| < q$$

gebunden, wobei (x) beliebig in $\mathfrak{H}$ liegt.

Hiermit haben wir eine Funktion $F(w, z, x)$ erhalten, welche sich in einem Punkte $(c, 0, 0)$, $c \neq 0$, analytisch, in jedem Punkte $(w, 0, 0)$, $|w| = |c| = K$, meromorph verhält und sich ferner längs jedes Weges

$$w = te^{\alpha i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K; \qquad (z, x) = (0, 0),$$

bis in jede Umgebung des Anfangs meromorph fortsetzen läßt. Wäre nun der Satz nicht richtig, so würde keine dieser Fortsetzungen bis in den Anfang selbst statt haben. Dann müßte es aber nach dem Levischen Satze von § 12, S. 212, einen Bereich

$$|z| < q_1 \leqq q, \qquad |x_k| < r_k \leqq h_k$$

geben, derart, daß, wenn (z^0, x^0) ein beliebiger Punkt desselben ist, die Funktion $F(w, z, x)$ sich doch längs eines der Wege

$$w = te^{\theta i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K, \qquad \theta = \text{const.}, \qquad (z, x) = (z^0, x^0),$$

nicht bis in den Anfang meromorph fortsetzen läßt.

Dies widerspricht aber dem wahren Sachverhalte, denn man braucht ja nur $(x^0) = (0)$, $0 < |z^0| < q$ zu wählen, um sicher zu sein, daß kein Punkt (w, z^0, x^0), $|w| \leqq K$, ein Ausnahmepunkt ist, — daß sich also $F(w, z, x)$ in all diesen Punkten meromorph verhält.

Hiermit ist nun der Beweis erbracht. Die Schlußweise berechtigt aber zu einem allgemeineren Satze.

Der erweiterte Satz. *Sei $F(w, z, x_1, \ldots, x_m)$ in jedem Punkte der Menge*

$$\Sigma: \qquad |w| = K, \quad 0 < K; \qquad z = 0, \quad x_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

meromorph und außerdem in einem dieser Punkte analytisch. Gibt es dann in jeder Umgebung des Punktes $(z, x) = (0, 0)$ einen Punkt $(\bar z, \bar x)$ derart, daß F sich längs jedes der Wege

$$\bar L: \quad w = te^{\theta i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K, \qquad \theta = \text{const.}; \qquad (z, x) = (\bar z, \bar x),$$

bis in den Punkt $(w, z, x) = (0, \bar z, \bar x)$ meromorph fortsetzen läßt, so läßt sich F auch längs eines der Wege

$$L: \quad w = te^{\theta i}, \qquad 0 \leqq t \leqq K, \qquad \theta = \text{const.}; \qquad (z, x) = (0, 0),$$

bis in den Anfang meromorph fortsetzen.

Hartogs erhält eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Satzes, wonach die Ausnahmepunkte einen $(2m + 2)$-dimensionalen Raum ausfüllen. Der vorstehende Satz geht aber noch weiter. So wäre beispielsweise denkbar, daß jedem Punkte (x') des Bereiches $|x_i| < r_i$ ein im Bereiche $|w| < K$, $|z| < g$ belegenes Kontinuum entspräche, dessen Grenzpunkte (w', z'), mit (x') zusammengenommen, stets zu einem wesentlichen singulären Punkte

$(w', z', x'_1, \ldots, x'_m)$ der Funktion F führen, wobei nun diese Punkte einen Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes abgrenzen, welcher bis an den Anfang hinanreicht. Gibt es nun andererseits in jeder Nähe des Punktes $(z, x_1, \ldots, x_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ einen Punkt $(\bar{z}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ derart, daß F sich in allen Punkten $(w, \bar{z}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, wofür nur $|w| \leqq K$ ist, meromorph verhält, so zeigt der Satz, daß ein solcher Sachverhalt ausgeschlossen ist.

Aus dem erweiterten Satze ergibt sich der folgende Satz unter eventueller Benützung einer geeigneten linearen Transformation.

Zusatz. *In der Umgebung einer Stelle* (a) *sei eine Funktion* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *im allgemeinen meromorph. Dabei sollen die Ausnahmepunkte auf einer regulären Mannigfaltigkeit* M_{2n-3} *(§ 7) liegen. Dann ist* F, *höchstens von hebbaren Singularitäten abgesehen, auch meromorph im Punkte* (a) *selbst.*

§ 16. Von der Verteilung der Singularitäten.

Die einfachsten Singularitäten, welche eine analytische Funktion von n Argumenten besitzen kann, sind Pole und außerwesentliche singuläre Stellen zweiter Art. Erstere liegen auf analytischen Gebilden $(n-1)$-ter, letztere auf solchen $(n-2)$-ter Stufe; vgl. Kap. 2, § 17, woselbst auch die Notwendigkeit dieser Bedingung betont ist.

Hartogs[1]) verallgemeinert diesen Satz, wie folgt: Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ in der Umgebung eines Punktes $(z) = (a)$ im allgemeinen analytisch, und bilden die Punkte dieses Bereiches, über welche hinaus die Funktion sich nicht analytisch fortsetzen läßt, eine stetige $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, so ist letztere notwendig ein analytisches Gebilde $(n-1)$-ter Stufe. Dabei wird angenommen, daß $\mathfrak{M}$ bei nicht-spezialisierter Wahl des Koordinatensystems sich in der Form darstellen läßt:

$$z_n = \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

wo φ eine endlich vieldeutige stetige Funktion bedeutet.

Auch der Fall, daß f mehrdeutig im genannten Bereiche ist, wird mit eingeschlossen.

Der Beweis beruht auf den Eigenschaften einer im Falle $n = 2$, $f = F(x, y)$, von Hartogs in seiner Dissertation[2]) ein-

1) *Acta Mathematica*, Bd. 32 (1908) S. 57.

2) *Math. Annalen*, Bd. 62 (1905) S. 24. Vgl. auch *The Madison Colloquium*, S. 150.

geführten Funktion R_x. Vermöge letzterer Funktion werden auch die assoziierten Konvergenzradien der Reihenentwicklung von $F(x, y)$ untersucht.[1])

§ 17. Hinreichende Bedingungen für analytisches Verhalten.

Bei der Definition einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen, Kap. I, § 5, wurde insbesondere die Stetigkeit der Funktion vorausgesetzt. Es handelt sich jetzt um die Aufhebung dieser Forderung.

Satz.[2]) *In jedem Punkte* (x, y) *eines Zylinderbereiches* $T = (T_1, T_2)$ *sei eine Funktion* $F(x, y)$ *eindeutig definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen.*

a) *Erteilt man* y *einen beliebigen in* T_2 *belegenen festen Wert* y', *so soll sich* $F(x, y')$ *analytisch in* T_1 *verhalten; und ebenso soll* $F(x', y)$, *wo* x' *einen willkürlichen festen Punkt von* T_1 *bedeutet, in* T_2 *analytisch sein.*

b) $F(x, y)$ *soll endlich bleiben:*

$$|F(x, y)| < G.$$

Dann verhält sich $F(x, y)$, *als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen* (x, y) *betrachtet, analytisch in* T.

Dieses Theorem ist um so merkwürdiger, weil der entsprechende Satz im reellen Gebiete nicht gilt. So ist beispielsweise die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0); \qquad f(0, 0) = 0,$$

für jeden reellen Wert y' von y eine im Intervalle $-\infty < x < \infty$ analytische Funktion des reellen Arguments x; und ebenso, wenn man x festhält, hängt die Funktion analytisch von y ab. Sie ist aber doch keine analytische Funktion von (x, y) in einem Bereiche, welcher den Anfang umfaßt.

Es genügt offenbar, den Satz für den Fall zu beweisen, daß T_1 und T_2 Kreise sind,

$$T_1\colon\ |x| < R; \qquad T_2\colon\ |y| < S.$$

Entwickelt man hier die Funktion in eine Potenzreihe nach y,

$$F(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots, \tag{1}$$

1) *Madison Colloquium*, S. 149.
2) Osgood, *Math. Annalen*, Bd. 52 (1899) S. 462.

so ergibt sich zunächst, i) daß $f_0(x) = F(x, 0)$ sich im Kreise T_1 analytisch verhält; sowie ii) daß

$$| f_n(x) | < G S_1^{-n}, \qquad 0 < S_1 < S.$$

Des weiteren verhalten sich überhaupt alle Koeffizienten $f_n(x)$ in T_1 analytisch. Sonst sei $f_m(x)$ der erste Koeffizient, wofür dies nicht zutrifft. Bildet man nun den Ausdruck

$$\psi(x, y) = \frac{F(x, y) - f_0(x) - f_1(x) y - \cdot \cdot - f_{m-1}(x) y^{m-1}}{y^m},$$

so verhält sich $\psi(x, y)$ vor allem für jeden festen Wert $y = y'$, wo $0 < | y' | < S$ ist, analytisch in T_1.

Andererseits ist

$$\psi(x, y) = f_m(x) + f_{m+1}(x) y + \cdots, \qquad y \neq 0.$$

Aus dieser Darstellung schließen wir aber, wie sogleich des näheren ausgeführt werden soll, daß $\psi(x, y)$ beim Grenzübergange $\lim y = 0$ einem Grenzwert, und zwar dem Werte $f_m(x)$, gleichmäßig zustrebt. Aus dem 6. Satze von Bd. I, Kap. 7, § 5 folgt dann, daß der Grenzwert sich ebenfalls in T_1 analytisch verhält, womit wir denn am Ziele sind.

Um den betreffenden Nachweis zu liefern, sei y irgendeine der Bedingung $0 < | y | < S_1$ unterworfene Zahl. Dann ist

$$| \psi(x, y) - f_m(x) | \leqq \sum_{k=1}^{\infty} | f_{m+k}(x) | \cdot | y |^k$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} G S_1^{-m} \left(\frac{| y |}{S_1} \right)^k = \frac{G | y |}{S_1^m (S_1 - | y |)},$$

woraus sich denn die gleichmäßige Konvergenz sofort ergibt.

Hiermit erweisen sich die Glieder der Reihe (1) als in T analytische Funktionen der beiden unabhängigen Variabelen (x, y). Im übrigen konvergiert die Reihe gleichmäßig in jedem Bereiche

$$| x | < R, \qquad | y | \leqq s < S,$$

da nämlich

$$| f_n(x) y^n | < G \left(\frac{s}{S_1} \right)^n, \quad s < S_1 < S.$$

Der verallgemeinerte Satz. *Sei $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ in jedem Punkte (x, y) eines $(2n + 2m)$-fach ausgedehnten Bereiches Σ eindeutig erklärt. Einem beliebigen Punkte (x^0, y^0) von Σ*

entspreche fernerhin eine zylinderförmige Umgebung $\Sigma_0 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m)$ *derart, daß, wenn* $(y) = (y')$ *willkürlich in* $(\tau) = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *angenommen und dann festgehalten wird, die Funktion* $F(x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_m)$ *sich in* $(\sigma) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *analytisch verhält. Und ebenfalls, wenn* $(x) = (x')$ *in* (σ) *beliebig gewählt wird, soll* $F(x'_1, \ldots, x'_n, y_1, \ldots, y_m)$ *in* (τ) *analytisch sein. Im übrigen soll* $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *in* Σ_0 *endlich bleiben:*

$$|F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)| < G_0.$$

Dann verhält sich $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, *als Funktion aller* $n + m$ *Argumente betrachtet, analytisch in* Σ.

Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall zu führen, daß Σ_0 aus dem Kreiszylinderbereiche

$$|x_i| < R_i, \quad i=1,\ldots,n; \qquad |y_j| < S_j, \quad j=1,\ldots,m,$$

besteht. Ist insbesondere $m = 1$, so läßt sich der vorstehende Beweis ohne weiteres auf diesen Fall ausdehnen.

Wir nehmen also an, der Satz sei richtig für $1, 2, \ldots, m-1$ Argumente $y_1, \ldots, y_{m-1}$, und beweisen ihn dann durch die Methode der vollständigen Induktion für den Fall von m Argumenten, $y_1, \ldots, y_m$.

Erteilt man y_m einen festen Wert, y'_m, wofür $|y'_m| < S_m$ ist, so erweist sich die Funktion, den Voraussetzungen zufolge, als analytisch in den $n + m - 1$ Argumenten $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Und wenn man nun $x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_{m-1}$ beliebig annimmt und dann festhält, so hängt die Funktion auch analytisch von y_m ab. Hiermit sind alle Hypothesen des soeben erledigten Falles erfüllt, und der Beweis ist erbracht.

Andere Formulierung. *Sei* $F(z_1, \ldots, z_m)$ *in jedem Punkte des Bereiches*

$$|z_i| < R_i, \qquad i=1,\ldots,m,$$

eindeutig erklärt, und sei $F(z_1^0, \ldots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \ldots, z_m^0)$, *wo* z_i^0 *im Kreise* $|z_i| < R_i$ *beliebig gewählt wird, analytisch im Kreise* $|z_k| < R_k$, $k=1,\ldots,m$. *Ist* $F(z_1, \ldots, z_m)$ *außerdem endlich im genannten Bereiche, so ist* F *dort analytisch.*

Für den Fall $m = 2$ ist der Beweis bereits erbracht. Durch die Methode der vollständigen Induktion läßt sich der Satz allgemein beweisen. Setzt man ihn nämlich für $m = 2, 3, \ldots, m-1$

als richtig voraus und hält man dann $z_m = z'_m$ fest, so erkennt man, daß $F(z_1, \ldots, z_{m-1}, z'_m)$ im Bereiche $|z_i| < R_i$, $i=1,\ldots,m-1$, analytisch von $(z_1, \ldots, z_{m-1})$ abhängt. Hiermit hat man mit demjenigen Falle der ersten Formulierung, wofür $n = m - 1$, $m = 1$ ist, Anschluß erreicht, und der Beweis ist fertig.

§ 18. **Fortsetzung. Ein Übergangssatz.**

Wir wollen jetzt den ersten Satz von § 17 ins Auge fassen und die Voraussetzung b) dabei fortlassen. Zur Behandlung dieses Falles bedürfen wir eines Satzes der Mengenlehre.

Hilfssatz.[1]) *In einem Bereiche S der Ebene sei eine Reihe von Punktmengen $P_1, P_2, \ldots$ vorgelegt, welche folgenden Bedingungen genügen:*

a) *die Punkte von P_i sind sämtlich in P_{i+1} enthalten;*

b) *in keinem zwei-dimensionalen Kontinuum sind die Punkte von P_i überall dicht.*

Ferner möge mit

$$\lim_{i=\infty} P_i = P$$

die Menge der Punkte bezeichnet sein, die überhaupt an den Mengen P_i beteiligt sind. Dann kann kein Teil von P ein zwei-dimensionales Kontinuum bilden.

Wäre der Satz nicht richtig, so sei σ ein zwei-dimensionaler in P enthaltener Bereich. Dann gibt es innerhalb σ einen Kreis σ_1, welcher weder im Innern noch am Rande einen Punkt von P_1 enthält. Ferner gibt es in σ_1 einen Kreis σ_2, welcher weder im Innern noch am Rande einen Punkt von P_2 enthält; usw. Diese Kreise $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ haben aber mindestens einen gemeinsamen Punkt, und dieser liegt außerdem in σ. Der gehört aber keiner Menge P_i an, und hiermit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des in Aussicht genommenen Satzes. Sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt von T, den wir nun als den Anfang annehmen wollen. Es genügt offenbar,

---

1) Dieser Satz nebst Beweis gilt allgemein für Punktmengen eines beliebig vielfach ausgedehnten Raumes. Für den Fall eines Intervalls habe ich ihn im *Amer. Journ. of Math.*, Bd. 19 (1897), S. 173 bewiesen. Vgl. auch *Math. Annalen*, Bd. 53 (1900), S. 462.

den Satz bloß für den Bereich

T': $\qquad |x| < R, \qquad |y| < S$

zu beweisen.

Sei $0 < R_1 < R$, und sei y' ein Punkt des Kreises

$\mathfrak{K}$: $\qquad |y| < S.$

Da die Funktion $F(x, y')$ im abgeschlossenen Bereiche:

B: $\qquad |x| \leqq R_1$

stetig ist, so ist sie dort auch endlich. Sei $M(y')$ der Maximalwert von $F(x, y')$ im genannten Bereiche.

Wir wollen mit P_i die Menge der Punkte y bezeichnen, wofür

$$M(y) \leqq i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

ist. Dann ist offenbar P_i in P_{i+1} enthalten. Des weiteren gehört jede im Innern von $\mathfrak{K}$ belegene Häufungsstelle y_0 von Punkten y' einer Menge P_i selbst zu dieser Menge. Denn die Funktion $|F(x', y)|$, wo x' einen festen Punkt von B bedeutet, ist ja eine stetige Funktion von y, und darum ist insbesondere

$$|F(x', y_0)| = \lim_{y'=y_0} |F(x', y')| \leqq i.$$

Aus dem Hilfssatze ergibt sich nun, daß es eine Menge P_N geben muß, deren Punkte in einem zwei-dimensionalen Teile τ von $\mathfrak{K}$ überall dicht sind und somit τ ganz ausfüllen. Demgemäß wird im Innern des Zylinderbereichs $\Sigma = (B, \tau)$

$$|F(x, y)| \leqq N$$

sein, und daher ist $F(x, y)$ nach dem Satze von § 17 im genannten Bereiche eine analytische Funktion der beiden unabhängigen Variabelen (x, y).

Satz.[1]) *Läßt man von den Voraussetzungen des ersten Satzes von* § 17 *die Fortsetzung* b) *fort, so gibt es in jeder Umgebung einer beliebigen Stelle* (x_0, y_0) *von* T *ein vier-dimensionales Kontinuum* Σ, *in welchem sich* $F(x, y)$ *analytisch verhält.*

---

1) Dieser und der folgende Satz finden sich in der soeben zitierten Note, *Math. Annalen*, Bd. 53 (1900), S. 461. Der erste wurde dort bewiesen, der zweite ist bloß als eine prägnante Formulierung des am Eingange dieses Paragraphen in Aussicht genommenen Satzes hingestellt. Das Verdienst seines Beweises gebührt Hartogs, vgl. § 20.

Wir wollen aber noch beweisen, daß F selbst im Punkte (x_0, y_0) analytisch ist. Nun kann man offenbar die Umgebung dieses Punktes so einschränken, daß es einen Kreiszylinderbereich $\mathfrak{T}$ mit dem Mittelpunkte in einem Punkte (x_1, y_1) von Σ gibt, welcher den Punkt (x_0, y_0) im Innern enthält und zugleich ganz in T liegt. Der Einfachheit halber verlegen wir den Anfang nun in den Punkt (x_1, y_1) und stellen den Bereich $\mathfrak{T}$, wie folgt, dar:

$$\mathfrak{T}: \qquad |x| < \mathfrak{R}, \qquad |y| < \mathfrak{S}.$$

Dabei verhält sich $F(x, y)$ im Anfang analytisch.

Um das in Aussicht gestellte Resultat zu erlangen, genügt also der Beweis des folgenden Satzes. Es sei uns noch gestattet, die Buchstaben $\mathfrak{T}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ bzw. durch T, R, S zu ersetzen.

Übergangssatz. *In einem Bereiche*

$$T: \qquad |x| < R, \qquad |y| < S$$

sei $F(x, y)$ eindeutig erklärt. Ferner sei $F(x, y')$ analytisch im Kreise $|x| < R$, wenn y' beliebig im Kreise $|y| < S$ angenommen und dann festgehalten wird; und ebenso sei $F(x', y)$ im Kreise $|y| < S$ analytisch, wenn x' einen festen Punkt des Kreises $|x| < R$ bedeutet.

Verhält sich $F(x, y)$ außerdem im Anfang analytisch, so ist $F(x, y)$ im ganzen Bereiche T analytisch.

Die Überlegungen dieses Paragraphen übertragen sich sofort auf Funktionen $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, wie sie in § 17 betrachtet sind, und die entsprechenden Sätze brauchen wohl nicht besonders im Texte gedruckt zu werden.

§ 19. Exkurs über die gliedweise Integration der Reihen.

Es handelt sich hier um den Beweis des folgenden, zur Begründung des Hilfssatzes, §§ 20, 21, nötigen Satzes.

Hauptsatz.[1]) *Vorgelegt sei eine Reihe reeller Funktionen des reellen Arguments x:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots,$$

1) Osgood, *Amer. Journ. of Math.*, Bd. 19 (1897), S. 155. Alle Sätze und Beweismethoden dieses Paragraphen finden sich bereits in dieser Arbeit. Die Beweise lassen sich teils durch Kunstgriffe, teils durch Entwicklungen

deren Glieder $u_n(x)$ *im Intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *sämtlich stetig sind, und welche außerdem in jedem Punkte dieses Intervalls gegen einen stetigen Grenzwert,* $f(x)$, *konvergiert. Bleibt dabei die Summe*

$$s_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

endlich, wenn x *und* n, *unabhängig voneinander, die Werte ihrer bezüglichen Mengen annehmen, so läßt sich die Reihe gliedweise integrieren:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots.$$

Der Satz gilt allgemein für Reihen, deren Glieder von m Argumenten $x_1, \ldots, x_m$ stetig abhängen, wobei dann das m-fache Integral über den Definitionsbereich der Glieder genommen wird. Andererseits darf eine mehrfache Reihe vorgelegt sein, und beide Verallgemeinerungen dürfen auch gleichzeitig eintreten.

Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, daß der Grenzwert $f(x) = 0$ ist, da dies ja stets dadurch zu erzielen ist, daß man das erste Glied $u_1(x)$ durch $u_1(x) - f(x)$ ersetzt.

Endlich genügt es, den Beweis für den Fall zu führen, daß

$$0 \leqq s_n(x)$$

ist, da man $s_n(x)$ nämlich in die Summe

$$s_n(x) = \varphi_n(x) + \psi_n(x)$$

spalten kann, wobei $\varphi_n(x)$ in allen Punkten, wo $s_n(x) > 0$ ist, gleich $s_n(x)$ gesetzt wird, in allen übrigen Punkten aber den Wert 0 hat. Dann wird andererseits $\psi_n(x) \leqq 0$ sein. Jede der Funktionen $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ ist stetig und hat den Grenzwert 0. Demgemäß setzen wir hinfort voraus, daß

$$0 \leqq s_n(x) \leqq A$$

sei, wo A eine Konstante bedeutet.

Definition eines Punktes γ. Sei x_0 ein Punkt des Intervalls (a, b), d. h. ein Punkt der Menge $a \leqq x \leqq b$, und sei ε eine an die Relation $0 < \varepsilon < A$ geknüpfte Zahl. Kommt es nun vor, wie

---

aus der Theorie der Lebesgueschen Integrale abkürzen. Trotzdem erscheint es als angebracht, die ursprünglichen Beweise hier wiederzugeben, denn sie setzen keine einschlägigen Kenntnisse voraus und lassen auch an Motivierung nichts zu wünschen übrig.

klein man auch die Umgebung Σ des Punktes x_0 wählen möge, daß es stets Zahlen n gibt, wofür in Punkten von Σ

$$\varepsilon < s_n(x)$$

wird, so heißt x_0 ein *Punkt* γ.

Geometrisch betrachtet ist ein Punkt γ ein solcher, in dessen Nähe unendlich viele Annäherungskurven $y = s_n(x)$ sich über dem Niveau $y = \varepsilon$ erheben; vgl. Bd. I, Kap. 3.

1. Satz. *Die Punkte γ, falls welche in unendlicher Anzahl vorhanden sind, bilden eine abgeschlossene Menge, welche in keinem Intervalle überall dicht ist.*

Daß die Menge vor allem abgeschlossen sein muß, erhellt sofort. Würde sie also in einem Teilintervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$ überall dicht sein, so müßte auch jeder Punkt dieses Intervalls zur Menge gehören.

Sei x_1 ein innerer Punkt eines solchen Intervalles (α, β). Dann gibt es eine Kurve

$$y = s_{n_1}(x),$$

welche sich in der Nähe von x_1 und also in einem Teil $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ dieses Intervalls über der Geraden $y = \varepsilon$ erhebt.

Jetzt nehmen wir einen inneren Punkt x_2 des Intervalls (α_1, β_1) an und schließen ebenso wieder auf die Existenz einer Funktion

$$y = s_{n_2}(x),$$

welche sich in einem Teile $\alpha_2 \leqq x \leqq \beta_2$ dieses Intervalls über der Geraden $y = \varepsilon$ erhebt.

Durch unbegrenzte Wiederholung dieses Schrittes erhält man eine unendliche Menge ineinander eingeschachtelter abgeschlossener Intervalle (α_k, β_k), welche dann mindestens einen Punkt ξ gemeinsam haben müssen. Demgemäß ist nun

$$\varepsilon < s_{n_k}(\xi), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

und dies verträgt sich eben nicht mit der Konvergenz von $s_n(\xi)$ gegen 0.

Von den Komponenten einer Punktmenge. Seien $P_1, P_2, \ldots$ eine Reihe von Punktmengen, wovon jede, P_n, in der darauf folgenden, P_{n+1}, enthalten ist; und sei P die Menge aller Punkte,

welche sich an den verschiedenen P_n beteiligen. Dann schreiben wir

$$P = \lim_{n=\infty} P_n$$

und bezeichnen P_n als eine *Komponente* von P.

Insbesondere dürfen alle Mengen von einem bestimmten $n = m$ ab miteinander identisch sein. Dann wird auch $P = P_m$ sein. Im übrigen dürfen einige der P_n noch keine Punkte enthalten bzw. aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehen.

Die Menge G der Punkte γ: $G = \{\gamma\}$ läßt sich, wie folgt, in eine Reihe von Komponenten zerlegen. Zur Teilmenge G_i mögen nämlich diejenigen Punkte gehören, in denen

$$s_n(\gamma) \leqq \varepsilon, \qquad i \leqq n,$$

ist.

2. Satz.[1]) *Seien $P_1, P_2, \dots$ die Komponenten einer abgeschlossenen Punktmenge P, und seien I_n, I der äußere Inhalt*[2]) *von P_n bzw. P. Im übrigen sei P in keinem Intervalle überall dicht. Dann ist*

$$\lim_{n=\infty} I_n = I.$$

Vor allem ist klar, daß

$$I_n \leqq I_{n+1} \leqq I$$

ist. Sei

$$\lim_{n=\infty} I_n = I'.$$

Dann ist $I' \leqq I$, und es handelt sich also bloß um den Nachweis, daß das untere Zeichen gilt.

Sei δ eine beliebig kleine positive Zahl, und seien ferner die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots$ so gewählt, daß

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots, \qquad 0 < \delta_n.$$

Die Punkte von P_1 lassen sich in eine endliche Anzahl von Intervallen $\tau_\varkappa^{(1)}$ einschließen, deren Gesamtlänge weniger als $I_1 + \delta_1$ beträgt[3]):

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(1)} < I_1 + \delta_1.$$

---

1) Bei der ursprünglichen Formulierung dieses Satzes (a. a. O. S. 178) habe ich noch verlangt, daß P_n abgeschlossen sei, denn dies trifft ja für die in Aussicht genommene Anwendung schon zu. Von dieser Voraussetzung wurde indessen beim Beweise kein Gebrauch gemacht.

2) Vgl. Bd. I, Kap. 5, § 12.

3) Es wird zu keiner Konfusion führen, wenn wir sowohl das Intervall als auch die Länge desselben mit dem Symbol $\tau_\varkappa^{(1)}$ bezeichnen.

Im übrigen sollen die Endpunkte der Intervalle nicht zu P gehören.

Die Menge P_2 hat keinen Punkt mit einem Endpunkte eines Intervalls $\tau_\varkappa^{(1)}$ gemeinsam, da dies nach Voraussetzung für P gilt. Sie liegt also zum Teil innerhalb dieser Intervalle[1]), zum Teil außerhalb derselben. Diese beiden Bestandteile von P_2 mögen mit P_2' bzw. P_2'', deren äußerer Inhalt mit I_2' bzw. I_2'' bezeichnet werden. Dann ist offenbar

$$(1) \qquad I_2' + I_2'' = I_2.$$

Ich behaupte nun: die Menge P_2'' läßt sich in eine endliche Anzahl von Intervallen $\tau_\varkappa^{(2)}$ einschließen, deren Gesamtlänge an die Ungleichung geknüpft ist:

$$(\mathrm{A}_2) \qquad \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(1)} + \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(2)} < I_2 + \delta_1 + \delta_2.$$

Im übrigen sollen die Endpunkte der Intervalle $\tau_\varkappa^{(2)}$ nicht zu P gehören, und diese Intervalle sollen auch nicht über die Intervalle $\tau_\varkappa^{(1)}$ hinübergreifen.

In der Tat kann man die Intervalle $\tau_\varkappa^{(2)}$ der genannten Art so wählen, daß

$$(2) \qquad \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(2)} < I_2'' + \delta_2$$

ist. Da ferner $I_1 \leqq I_2'$ ist, so folgt aus (A_1), daß

$$(3) \qquad \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(1)} < I_2' + \delta_1$$

ist. Addiert man nun (2) und (3) zusammen und zieht man dann noch (1) heran, so ergibt sich (A_2).

Durch Wiederholung dieser Überlegung gelangen wir allgemein zur Relation

$$(\mathrm{A}_n) \qquad \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(1)} + \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(2)} + \cdots + \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(n)} < I_n + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n.$$

Dabei liegt die Menge P_n in einer endlichen Anzahl von Intervallen $\tau_\varkappa^{(i)}$, $i=1, \ldots n$, welche nicht übereinandergreifen und auch keinen Endpunkt mit einem Punkte von P gemeinsam haben. Insbesondere dürfen einige der Summen linker Hand fehlen.

---

1) Insbesondere kann sie schon ganz innerhalb dieser Intervalle liegen. Dann fällt dieser nächste Schritt fort. Wir sind immerhin noch zur Relation (A_2) berechtigt, wobei jetzt die zweite Summe linker Hand nur durch 0 ersetzt werde.

Der Angelpunkt des ganzen Beweises besteht nun darin, *daß die Anzahl der Intervalle* $\tau_\varkappa^{(i)}$ *bei wachsendem* n *nicht ins Unendliche wächst.* Vielmehr gibt es eine bestimmte Zahl m derart, daß alle P_n, sowie auch P, in den Intervallen $\tau_\varkappa^{(i)}$, $i=1,\ldots,m$, und zwar im Innern derselben liegen.

Wäre dem nämlich nicht so — müßte man vielmehr bei wachsendem n immer noch neue Intervalle $\tau_\varkappa^{(n)}$ hinzunehmen —, so würden die Endpunkte derselben, da alles in einem abgeschlossenen Intervalle (a, b) liegt, eine Häufungsstelle $x = \xi$ besitzen, welche denn auch eine Häufungsstelle von Punkten der Menge P wäre. Da P nach Voraussetzung abgeschlossen ist, so muß ξ zu P gehören und somit in einem bestimmten P_n vorkommen. Dabei möge n die kleinste Zahl sein, wofür dies eintritt. Dann liegt ξ im Innern eines gewissen $\tau_\varkappa^{(n)}$. Aus diesem Widerspruch ergibt sich der Beweis der Behauptung.

Hiermit ist uns denn gelungen, die Menge P in eine endliche Anzahl von Intervallen $\tau_\varkappa^{(i)}$ einzuschließen, deren Gesamtlänge

$$\sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(1)} + \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(2)} + \cdots + \sum_\varkappa \tau_\varkappa^{(m)} < I_m + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$$

ist. Demnach muß I kleiner als die linke Seite dieser Ungleichung sein.

Andererseits ist $I_m \leqq I'$, sowie $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m < \delta$. Daraus folgt denn schließlich, daß

$$I < I' + \delta$$

ist, und da nun $I' \leqq I$ ist, so kann nur $I' = I$ sein, w. z. b. w.

3. Satz. *In einem abgeschlossenen Intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *sei* $\varphi(x)$ *eine stetige Funktion, welche folgenden Bedingungen noch unterworfen wird.*

i) *In jedem Punkte des Intervalls ist*

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq A.$$

ii) *In jedem Punkte einer im genannten Intervalle enthaltenen abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{P}$, *deren äußerer Inhalt* $\mathfrak{J}$ *sei, ist*

$$\varphi(x) \leqq \varepsilon < A.$$

Alsdann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \varepsilon\mathfrak{J} + A\,(\overline{b-a} - \mathfrak{J}).$$

Zum Beweise teile man das Intervall (a, b) durch die Punkte $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ $(x_{k-1} < x_k)$ in n gleiche Teile ein und bilde die Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x'_k)\,\Delta x_k, \qquad x_{k-1} \leqq x'_k \leqq x_k, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Einer beliebig kleinen positiven Zahl η entspricht dann eine natürliche Zahl m derart, daß

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \eta < S_n$$

ist, sobald nur $n \geqq m$ genommen wird, wie auch immer die Punkte x'_k gewählt werden mögen.

Sei l_n die Summe derjenigen Δx_k, welche Intervallen entsprechen, in denen ein Punkt von $\mathfrak{P}$ (als innerer oder Endpunkt) vorkommt. Die Summe der übrigen Δx_k beträgt dann $b - a - l_n$. In jedem Intervalle der ersten Gattung werde nun x'_k in einen Punkt von $\mathfrak{P}$ verlegt. Demgemäß wird für ein solches Intervall

$$\varphi(x'_k)\,\Delta x_k \leqq \varepsilon \Delta x_k$$

sein. Dagegen wird in einem Intervalle der zweiten Gattung sicher

$$\varphi(x'_k)\,\Delta x_k \leqq A\,\Delta x_k.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$S_n \leqq \varepsilon l_n + A(b - a - l_n)$$

ist. Mithin muß auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \eta < \varepsilon l_n + A(b - a - l_n).$$

Nun ist aber

$$\lim_{n=\infty} l_n = \mathfrak{J},$$

und hiermit ist der Satz bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes. Wir sind nunmehr im Besitze alles Materials zum Beweise des Hauptsatzes. Sei ε eine beliebig kleine positive Zahl, und man bestimme die dazu gehörigen γ-Punkte. Die Menge dieser Punkte haben wir mit G bezeichnet, und wir

haben dieselbe in einer bestimmten Weise wieder in Komponenten G_n zerlegt. Seien I, I_n der äußere Inhalt von G bzw. G_n. Auf G_n und G ist nun der 2. Satz anwendbar.

Sei δ eine beliebig kleine positive Zahl. Dann können die Punkte von G in eine endliche Anzahl von Intervallen τ eingeschlossen werden, deren Gesamtlänge

$$\sum \tau < I + \delta$$

wird. Andererseits kann m so gewählt werden, daß

$$I - \delta < I_n$$

wird, sobald nur $n \geqq m$ ist.

Daraus ergibt sich die Relation:

$$\sum \tau < I_n + 2\delta, \qquad m \leqq n.$$

Wir setzen $\sum \tau = h$ und erhalten somit, da $I_n < h$ ist,

(4) $$0 < h - I_n < 2\delta.$$

Die nicht zu den Intervallen τ gehörigen Punkte des Intervalls (a, b) bilden eine endliche Anzahl komplementärer Intervalle σ, deren Summe

(5) $$\sum \sigma = \overline{b - a} - h$$

ist. Indem man die obige Zahl m nötigenfalls vergrößert, kann man noch erreichen, daß in allen Punkten von σ die Beziehung statt hat:

(6) $$0 \leqq s_n(x) < \varepsilon, \qquad m \leqq n.$$

Das abzuschätzende Integral werde nun, wie folgt, zerlegt:

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_{(\sigma)} s_n(x)\,dx + \int_{(\tau)} s_n(x)\,dx, \qquad m \leqq n.$$

Aus (6) und (5) ergibt sich, daß

(7) $$\int_{(\sigma)} s_n(x)\,dx < (b - a - h)\,\varepsilon.$$

Zur Abschätzung des zweiten Integrals rechter Hand wird der 3. Satz herangezogen. Darnach wird

(8) $$\int_{(\tau)} s_n(x)\,dx \leqq I_n\varepsilon + (h - I_n)A < I_n\varepsilon + 2A\delta.$$

Hiermit erhält man die endgültige Abschätzung:

$$\int_a^b s_n(x)\,dx < (b-a)\,\varepsilon + 2A\,\delta,$$

und der Beweis ist erbracht.

Der Fall $s_{m,n}(x)$. An Stelle von $s_n(x)$ darf die Funktion $s_{m,n}(x)$ treten, wo m, n zwei beliebige natürliche Zahlen sind und $s_{m,n}(x)$ bei festen m, n stetig von x abhängt, $a \leqq x \leqq b$. Bleibt $s_{m,n}(x)$ endlich, so wird man sich wiederum auf den Fall beschränken können, daß stets

$$0 \leqq s_{m,n}(x) \leqq A.$$

Bei der Definition eines *Punktes* γ wird nun an Stelle der einen Zahl n bloß das Zahlenpaar (m, n) treten.

Bei der Definition der Komponente G_i wird jetzt die Bedingung benutzt:

$$s_{m,n}(\gamma) \leqq \varepsilon, \qquad i \leqq m+n.$$

Endlich wird beim Beweise des Hauptsatzes eine Zahl μ so gewählt, daß α)

$$I - \delta < I_i, \qquad \mu \leqq i,$$

sowie β)

$$s_{m,n}(x) < \varepsilon, \qquad \mu \leqq m+n. \quad x \text{ in } \sigma.$$

§ 20. Der allgemeine Satz, $n = 2$.

Den Übergangssatz von § 18 hat Hartogs[1]) vermöge des folgenden Satzes bewiesen.

Hilfssatz. *Vorgelegt sei eine Reihe*

(1) $$f_0(x) + f_1(x)\,y + f_2(x)\,y^2 + \cdots,$$

wobei sich $f_n(x)$ *im Kreise*

K: $$|x| \leqq R$$

analytisch verhält. Sei ferner vorausgesetzt,

i) *daß die Reihe, für einen festen Wert* $y_0 \neq 0$, *im Kreise* K *gleichmäßig konvergiere;*

ii) *daß die Reihe, für einen festen Wert* $y_1 \neq 0$, *im Kreise* K *schlechtweg konvergiere.*

---

1) *Math. Annalen*, Bd. 62 (1905), S. 9.

Alsdann konvergiert die Reihe gleichmäßig im Bereiche $|x| \leqq R' < R, \quad |y| \leqq S_1 < |y_1|$.

Zur Abkürzung werde $|y_0| = \beta$, $|y_1| = \mathsf{B}$ gesetzt. Im Falle $\mathsf{B} \leqq \beta$ ist, ergibt sich der Beweis sofort aus den allgemeinen Sätzen betreffend Potenzreihen; vgl. Bd. I, S. 103. Sei also $\mathsf{B} > \beta$.

Aus der Bedingung i) folgt, daß es eine von n und x unabhängige natürliche Zahl μ gibt derart, daß

$$(2) \qquad |f_n(x)| < \frac{1}{\beta^n}$$

bleibt, wenn $n \geqq \mu$ und x beliebig im Kreise K genommen werden. (Wir erinnern daran, daß die Funktion $|f_n(x)|$ ihren größten Wert am Rande des Kreises K annimmt.)

Ferner schließt man aus ii), daß jedem Punkte x des Kreises C: $|x| = R$ eine natürliche Zahl μ_x entspricht, derart, daß

$$(3) \qquad |f_n(x)| < \frac{1}{\mathsf{B}^n}$$

bleibt, sobald nur $n \geqq \mu_x$ ist.

Wir bilden jetzt die Funktion

$$(4) \qquad \frac{1}{n} \log |f_n(x)| + \log \mathsf{B}.$$

Sollte insbesondere $f_n(x)$ identisch verschwinden, so werde dieselbe $= 0$ gesetzt. Die Funktion verhält sich im Innern und am Rande des Kreises K im allgemeinen harmonisch. Dabei bestehen die Ausnahmepunkte höchstens aus Polen, in welchen sie negativ unendlich wird. In jedem Randpunkte von K nimmt sie also einen Randwert an oder aber sie wird dort negativ unendlich.

Aus (2) ergibt sich endlich, daß am Rande C von K die folgende Relation statt hat:

$$(5) \qquad \left[\frac{1}{n} \log |f_n(x)| + \log \mathsf{B}\right]_C < \log \frac{\mathsf{B}}{\beta}, \qquad \mu \leqq n.$$

Wir zerlegen jetzt die Funktion (4) in zwei Teile:

$$(6) \qquad \frac{1}{n} \log |f_n(x)| + \log \mathsf{B} = g_n(\xi, \eta) + h_n(\xi, \eta), \qquad x = \xi + i\eta,$$

wobei nun $g_n(\xi, \eta)$, wie folgt, definiert wird.

a) Im Innern des Kreises K soll g_n harmonisch sein;

b) Am Rande C von K soll dieser Funktion überall da, wo die Funktion (4) einen positiven Randwert annimmt, der gleiche Randwert vorgeschrieben werden. In allen übrigen Randpunkten soll g_n den Randwert 0 annehmen. — Die Randwerte von g_n mögen mit $G_n = G_n(\psi)$, $\psi = \operatorname{arc} x$, bezeichnet werden.

Daraus folgt, daß durchweg in K $g_n(\xi, \eta) \geqq 0$, sowie daß $h_n(\xi, \eta) \leqq 0$ ist, und darum ist auch durchweg

$$\frac{1}{n} \log |f_n(x)| + \log \mathsf{B} \leqq g_n(\xi, \eta). \tag{7}$$

Im übrigen ist am Rande von K wegen (5)

$$0 \leqq |g_n(\xi, \eta)|_C = G_n(\psi) < \log \frac{\mathsf{B}}{\beta}, \qquad \mu \leqq n;$$

sowie ferner wegen (3):

$$\lim_{n=\infty} G_n(\psi) = 0.$$

In jedem inneren Punkte (ξ, η) des Kreises K kann man g_n nach der Methode von Bd. I, S. 686 abschätzen. So kommt:

$$g_n(\xi, \eta) \leqq \frac{R+r}{R-r} M_n, \qquad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < R, \tag{8}$$

wo

$$M_n = g_n(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_n d\psi.$$

Hiermit haben wir Anschluß an die Ergebnisse von § 19 erreicht, denn $G_n(\psi)$ ist für jeden Wert von n eine stetige Funktion von ψ im Intervalle $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, welche für alle Werte von ψ im genannten Intervalle und für $n = 1, 2, \ldots$ endlich und nichtnegativ bleibt:

$$0 \leqq G_n(\psi) < \log \frac{\mathsf{B}}{\beta};$$

und fernerhin ist für jeden Wert von ψ, wie bereits bemerkt,

$$\lim_{n=\infty} G_n(\psi) = 0.$$

Mithin entspricht einer beliebigen positiven Zahl ε' eine natürliche Zahl ν derart, daß

$$\int_0^{2\pi} G_n d\psi < \varepsilon', \qquad \nu \leqq n. \tag{9}$$

Aus (8) folgt nun, daß

$$g_n(\xi, \eta) < \frac{1}{2\pi} \frac{R+r}{R-r} \varepsilon', \qquad r<R, \quad \nu \leqq n.$$

Nimmt man also $\varepsilon > 0$ beliebig klein, sowie $R' < R$ beliebig nahe an R an und bestimmt man ε' dann aus der Gleichung

$$\varepsilon' = 2\pi \frac{R-R'}{R+R'} \varepsilon,$$

so wird unter Benutzung von (9) und (8)

$$(10) \qquad g_n(\xi, \eta) < \varepsilon, \qquad r = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqq R', \qquad \nu \leqq n.$$

Aus (7) schließt man jetzt, sofern $f_n(x)$ nicht identisch verschwindet, daß

$$\frac{1}{n} \log |f_n(x)| + \log \mathsf{B} < \varepsilon, \qquad |x| \leqq R',$$

oder auch

$$(11) \qquad |f_n(x)| < \left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{B}}\right)^n, \qquad |x| \leqq R', \qquad \nu \leqq n,$$

und diese letzte Relation gilt selbst dann noch, wenn $f_n(x) \equiv 0$.

Ist nun $|y| \leqq S_1$, so ergibt sich aus (11), daß

$$(12) \qquad |f_n(x)\, y^n| < \left(\frac{S_1}{\mathsf{B}} e^\varepsilon\right)^n, \qquad |x| \leqq R', \qquad \nu \leqq n.$$

Hiernach braucht man ε nur so zu wählen, da S_1 ja nach Voraussetzung $< |y_1| = \mathsf{B}$ ist, daß

$$\frac{S_1}{\mathsf{B}} e^\varepsilon < 1, \qquad \text{also} \qquad \varepsilon < \log \frac{\mathsf{B}}{S_1}$$

wird, um aus (12) auf die in Aussicht gestellte gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) im Bereiche $|x| \leqq R' < R$, $|y| \leqq S_1 < |y_1|$ zu schließen.

B e w e i s d e s Ü b e r g a n g s s a t z e s, § 18. Da $f(x, y)$ sich nach Voraussetzung im Anfange analytisch verhält, so gibt es zwei positive Zahlen $R_1 \leqq R$, $S_1 \leqq S$ derart, daß die Darstellung

$$(13) \qquad F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, y^n$$

gilt, wobei die Reihe im Bereiche

$$B_1: \qquad |x| \leqq R_1, \qquad |y| \leqq S_1$$

gleichmäßig konvergiert und $f_n(x)$ sich im Kreise $|x| \leqq R_1$ analytisch verhält. Erteilt man y also einen von 0 verschiedenen Wert y_0 im Kreise $|y| \leqq S_1$, so ist hiermit die Bedingung i) des Hilfssatzes, bezogen auf den Kreis $K = K_1$: $|x| \leqq R_1$, erfüllt.

Jetzt nehme man y_1 beliebig nahe am Rande des Kreises $|y| = S$ doch so, daß $|y_1| < S$. Erteilt man x einen willkürlichen Wert x' im Kreise $|x| \leqq R_1$ und hält man x' dann fest, so wird sich $F(x', y)$, als Funktion von y allein betrachtet, durch eine Reihe von der Form (13) darstellen lassen:

$$F(x', y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x')\, y^n. \tag{14}$$

Im Kreise $|y| \leqq S_1$ stimmt aber diese Reihe mit der Reihe (13) überein. Mithin muß

$$\varphi_n(x) = f_n(x), \quad {\scriptstyle n=0,1,\ldots,} \qquad |x| \leqq R_1.$$

Daher konvergiert die Reihe (13) schlechtweg für $y = y_1$, und somit sind auch alle Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Daraus ergibt sich denn, daß die vorgelegte Funktion $F(x, y)$ sich nicht bloß im Bereiche B_1, sondern noch im Bereiche

$$B': \qquad |x| < R_1, \qquad |y| < S$$

analytisch verhält.

Jetzt wird man eine neue Anwendung des Hilfssatzes machen, indem man nun von derselben Funktion $F(x, y)$ ausgeht, aber von dem Umstande Gebraucht macht, daß dieselbe sich im Bereiche B' analytisch verhält. Indem man hier x und y ihre Rollen vertauschen läßt, schließt man nunmehr aus dem dahin abgeänderten Hilfssatze, daß $F(x, y)$ sich im ganzen Bereiche

$$|x| < R, \qquad |y| < S$$

analytisch verhält, und hiermit ist der Beweis des Übergangssatzes erbracht.

§ 21. Verallgemeinerung auf Funktionen von n Argumenten.

Um den letzten Satz von § 17 unter Aufhebung der Endlichkeitsannahme zu beweisen, genügt es, die Richtigkeit des entsprechenden Übergangssatzes, § 18, darzutun. Da nun ersterer Satz für Funktionen zweier Argumente feststeht, so wird man ihn für Funktionen von $2, \ldots, n-1$ Argumenten als richtig voraus-

setzen und dann den in geeigneter Weise verallgemeinerten Hilfssatz von § 20 für den Fall von n Argumenten nachweisen. Die Methode erhellt bereits aus der Behandlung des Falles dreier Argumente.

Übergangssatz. *Sei $F(x, y, z)$ in jedem Punkte des Bereiches*

$$\Sigma: \qquad |x| < R_1, \qquad |y| < R_2, \qquad |z| < R_3$$

eindeutig erklärt. Erteilt man irgend zweien der Argumente beliebige in ihren bezüglichen Kreisen gelegene Werte, welche dann fest bleiben sollen, so soll sich F, als Funktion des dritten Arguments allein betrachtet, analytisch im ganzen zugehörigen Kreise verhalten. Endlich soll sich $F(x, y, z)$, als Funktion aller drei Variabelen betrachtet, im Anfange analytisch verhalten. Dann verhält sich $F(x, y, z)$ im ganzen Bereiche Σ analytisch.

Zum Beweise bedient man sich der folgenden Verallgemeinerung des Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Vorgelegt sei eine Reihe*

$$(1) \qquad \sum_{m,n} f_{m,n}(x)\, y^m z^n,$$

wobei sich $f_{m,n}(x)$ im Kreise

$$K: \qquad |x| \leqq R$$

analytisch verhält. Sei ferner vorausgesetzt,

i) *daß die Reihe für $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$ im Kreise $|x| \leqq R$ gleichmäßig konvergiert;*

ii) *daß die Reihe für $y_1 \neq 0, z_1 \neq 0$ im Kreise K schlechtweg konvergiert.*

Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig im Bereiche

$$|x| \leqq R' < R, \qquad |y| \leqq S_1 < |y_1|, \qquad |z| \leqq T_1 < |z_1|.$$

Setzt man

$$|y_0| = \beta, \quad |y_1| = \mathsf{B}, \quad |z_0| = \gamma, \quad |z_1| = \mathsf{C},$$

so darf man vom Falle $\mathsf{B} \leqq \beta$, $\mathsf{C} \leqq \gamma$ absehen, da dieser ja vermöge der allgemeinen Sätze betreffend Potenzreihen sofort erledigt wird. Es möge also mindestens eine der Ungleichungen

$$1 < \frac{\mathsf{B}}{\beta}, \qquad 1 < \frac{\mathsf{C}}{\gamma}$$

statthaben.

Aus der Bedingung i) folgt vor allem, daß es eine von x, m, n unabhängige Zahl μ gibt derart, daß

$$(2) \qquad |f_{m,n}(x)| < \frac{1}{\beta^m \gamma^n}$$

bleibt, wofern nur

$$|x| \leqq R, \qquad \mu \leqq m + n.$$

Ferner schließt man aus ii), daß jedem Punkte x des Kreisrandes

$$C: \qquad |x| = R$$

eine natürliche Zahl μ_x entspricht, derart, daß

$$(3) \qquad |f_{m,n}(x)| < \frac{1}{\mathsf{B}^m \mathsf{C}^n}, \qquad \mu_x \leqq m + n.$$

Wir bilden jetzt die Funktion

$$(4) \qquad \frac{1}{m+n} \log |f_{m,n}(x)| + \frac{m}{m+n} \log \mathsf{B} + \frac{n}{m+n} \log \mathsf{C}.$$

Verschwindet $f_{m,n}(x)$ insbesondere identisch, so werde diese Funktion auch identisch gleich 0 gesetzt.

Aus (2) ergibt sich, wenn $m + n \geqq \mu$, daß

$$(5) \qquad \frac{1}{m+n} \log |f_{m,n}(x)| + \frac{m}{m+n} \log \mathsf{B} + \frac{n}{m+n} \log \mathsf{C}$$
$$< \frac{m}{m+n} \log \frac{\mathsf{B}}{\beta} + \frac{n}{m+n} \log \frac{\mathsf{C}}{\gamma} \leqq \left| \log \frac{\mathsf{B}}{\beta} \right| + \left| \log \frac{\mathsf{C}}{\gamma} \right|.$$

Wir zerlegen jetzt die Funktion (4) in zwei Teile:

$$(6) \qquad \frac{1}{m+n} \log |f_{m,n}(x)| + \frac{m}{m+n} \log \mathsf{B} + \frac{n}{m+n} \log \mathsf{C}$$
$$= g_{m,n}(\xi, \eta) + h_{m,n}(\xi, \eta),$$

wobei $x = \xi + i\eta$ gesetzt ist und außerdem $g_{m,n}(\xi, \eta)$ ähnlich wie früher definiert wird, und zwar, wie folgt:

a) Im Innern des Kreises K soll $g_{m,n}(\xi, \eta)$ harmonisch sein.

b) Am Rande C von K soll $g_{m,n}(\xi, \eta)$ eine stetige Folge von Randwerten annehmen, welche mit dem Werte der Funktion (4) in einem Punkte von C übereinstimmen, wo letztere Funktion positiv ist, und sonst gleich 0 gesetzt werden mögen.

Von hier ab verläuft der Beweis genau so, wie im früheren Falle, und man gelangt so zu folgender Abschätzung: einer beliebig kleinen positiven Zahl ε und einer beliebig nahe an R ge-

wählten Zahl $R' < R$ entspricht eine Zahl ν derart, daß

$$0 \leqq g_{m,n}(\xi, \eta) < \varepsilon, \qquad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leqq R' < R, \qquad \nu \leqq m + n.$$

Daraus ergibt sich, daß auch

$$\frac{1}{m+n} \log |f_{m,n}(x)| + \frac{m}{m+n} \log \mathsf{B} + \frac{n}{m+n} \log \mathsf{C} < \varepsilon,$$

sofern nur $f_{m,n}(x)$ nicht identisch verschwindet und $|x| \leqq R' < R$, $\nu \leqq m + n$. Mithin ist, selbst wenn $f_{m,n}(x) \equiv 0$,

$$|f_{m,n}(x)| < \left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{B}}\right)^m \left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{C}}\right)^n, \qquad |x| \leqq R' < R, \qquad \nu \leqq m + n.$$

Ist nun $|y| \leqq S_1 < \mathsf{B}$, $|z| \leqq T_1 < \mathsf{C}$, so wird

$$|f_{m,n}(x)\, y^m z^n| < \left(\frac{S_1}{\mathsf{B}} e^\varepsilon\right)^m \left(\frac{T_1}{\mathsf{C}} e^\varepsilon\right)^n, \qquad |x| \leqq R' < R, \qquad \nu \leqq m + n.$$

Demgemäß braucht man nur $\varepsilon > 0$ so klein zu wählen, daß

$$\frac{S_1}{\mathsf{B}} e^\varepsilon < 1, \qquad \frac{T_1}{\mathsf{C}} e^\varepsilon < 1$$

wird, und der Beweis ist fertig.

Beweis des Übergangssatzes. Nach Voraussetzung ist $F(x, y, z)$ in einem Bereiche

$$|x| < R_1, \qquad |y| < R_2, \qquad |z| < R_3$$

eindeutig erklärt. Legt man zweien der drei Argumente feste, in ihren bezüglichen Kreisen befindliche Werte bei, so soll sich F ferner, als Funktion des dritten Arguments betrachtet, im dritten Kreise analytisch verhalten. Endlich soll $F(x, y, z)$, als Funktion aller drei Argumente betrachtet, in einem Bereiche

$$|x| \leqq R_1' \leqq R_1, \qquad |y| \leqq R_2' \leqq R_2, \qquad |z| \leqq R_3' \leqq R_3,$$

analytisch sein.

Vor allem läßt sich $F(x, y, z)$ durch die Reihe (1) darstellen:

$$F(x, y, z) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x)\, y^m z^n, \tag{7}$$

wobei $|x| \leqq R_1'$, $|y| \leqq R_2'$, $|z| \leqq R_3'$ und außerdem $f_{m,n}(x)$ sich im Kreise $|x| \leqq R_1'$ analytisch verhält. Wählt man nun y_0, z_0 so, daß $0 < |y_0| \leqq R_2'$, $0 < |z_0| \leqq R_3'$, so konvergiert die Reihe gleichmäßig im Kreise $|x| \leqq R_1'$. Hiermit ist Bedingung i) des Hilfssatzes erfüllt.

Des weiteren sei x' ein beliebiger Punkt des Kreises $|x| \leqq R'_1$, den wir nun festhalten wollen. Indem wir $F(x', y, z)$ als Funktion von y, z allein betrachten, folgt aus dem Hauptsatze im Falle $n = 2$, daß $F(x', y, z)$ sich im Bereiche $|y| < R_2$, $|z| < R_3$ analytisch verhält. Mithin ist daselbst

$$F(x', y, z) = \sum_{m,n} \varphi_{m,n}(x')\, y^m z^n,$$

und nun beweist man gerade so wie vorhin, daß

$$\varphi_{m,n}(x) = f_{m,n}(x).$$

Jetzt wähle man y_1, z_1 bzw. in den Kreisen $|y| < R_2$, $|z| < R_3$ beliebig nahe am Rande derselben. Dann konvergiert die Reihe (7) für $y = y_1$, $z = z_1$, wobei x beliebig im Kreise $|x| \leqq R'_1$ gewählt ist. Darum ist auch die Bedingung ii) des Hilfssatzes erfüllt, und $F(x, y, z)$ verhält sich somit analytisch im Bereiche

$$|x| < R'_1, \qquad |y| < R_2, \qquad |z| < R_3.$$

Indem man jetzt eine ähnliche Überlegung anstellt, wobei eine der Variabelen y, z an Stelle von x tritt, gelangt man schließlich zum Ergebnisse, daß $F(x, y, z)$ sich im Bereiche

$$|x| < R_1, \qquad |y| < R_2, \qquad |z| < R_3$$

analytisch verhält, und hiermit sind wir nun am Ziele.

§ 22. Die Cousinsche Abhandlung vom Jahre 1895.

Wir wenden uns jetzt, in den nächsten drei Paragraphen, zur Betrachtung eines wichtigen Beitrags zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Argumente, welcher von Cousin in seiner Dissertation[1]) niedergelegt ist. Es handelt sich um die Ausdehnung der Weierstraßschen und der Mittag-Lefflerschen Sätze von Bd. I, Kap. 11, §§ 10—12 auf Funktionen der genannten Art.

Das Integral I. Sei S' ein ein- oder mehrfach zusammenhängender Bereich der x-Ebene und sei l eine einfache reguläre nicht-geschlossene Kurve der y-Ebene. Sei ferner $f(x, y)$ eine analytische Funktion der beiden unabhängigen Variabelen in jedem

1) Pariser Thèse: *Sur les fonctions de n variables complexes*, 1894 = *Acta Mathematica*, Bd. 19 (1895), S. 1.

Punkte (x, t), wo x ein innerer Punkt von S' und t auf l liegt. Dann stellt das über l hinerstreckte Integral

$$(1) \qquad I = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(x,t)\,dt}{t-y}$$

eine im Zylinderbereiche (S', T) analytische Funktion von (x, y) dar, wobei T aus der ganzen y-Ebene exklusive der Kurve l besteht.

Um nun das Verhalten von I in den Punkten von l des näheren zu bestimmen, bemerken wir vor allem, daß die Kurve l im Innern eines bestimmten Streifens Σ der y-Ebene eingebettet werden kann, dergestalt, daß $f(x, y)$ sich im Zylinderbereich (S', Σ) analytisch verhält.

Sei y_0 ein beliebiger Punkt von l, und sei K ein innerhalb Σ gelegener Kreis mit dem Mittelpunkte y_0; sei endlich $\mathfrak{K}$ ein konzentrischer Kreis vom drittel Radius. Sind dann t, y zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{K}$, so ist

$$f(x, t) = f(x, y) + (t-y) f_y(x, y) + \frac{1}{2!}(t-y)^2 f_{yy}(x, y) + \cdots,$$

$$\frac{f(x,t) - f(x,y)}{t-y} = f_y(x, y) + \frac{1}{2!}(t-y) f_{yy}(x, y) + \cdots.$$

Sei allgemein

$$\frac{f(x,t) - f(x,y)}{t-y} = F(x, y, t).$$

Dann verhält sich $F(x, y, t)$ zunächst im Zylinderbereich $(S', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$, nach geeigneter Ergänzung in den hebbaren singulären Punkten $t - y = 0$, analytisch. Läßt man ferner t die Kurve l außerhalb $\mathfrak{K}$ durchwandern, so verhält sich F für jeden solchen festen Punkt t analytisch im Bereiche $(S', \mathfrak{K})$, während F andererseits stetig von allen drei Argumenten abhängt.

Hieraus erkennt man, daß

$$(2) \qquad I = \frac{f(x,y)}{2\pi i}\log\frac{b-y}{a-y} + \mathfrak{A}(x, y)$$

ist, wobei derjenige Zweig des Logarithmus gemeint ist, welcher im Punkte $y = \infty$ verschwindet, und y in der Nähe von l (insbesondere in Σ), aber nicht auf l liegt. Im übrigen verhält sich $\mathfrak{A}(x, y)$ analytisch in allen Punkten (x, t), wo x in S' und t auf l liegt, insbesondere im Bereiche (S', Σ).

Auf Grund der Darstellung (2) läßt sich die analytische Fortsetzung von I in der Umgebung eines solchen Punktes (x, t) leicht erkennen. Bezeichnet man nämlich das linke Ufer von l, wenn t diese Kurve im Sinne von a nach b durchläuft, als das positive, das rechte als das negative, so ergibt sich für die genannte Umgebung

$$I^+ = I^- + f(x, y). \tag{3}$$

Die Funktion $\Psi(x, y)$. Zum Schluß betrachten wir mehrere Kurven l_k, welche den einen Endpunkt b gemein haben und sich sonst nicht treffen, und ordnen denselben bzw. Funktionen $f_k(x, y)$ zu, welche den für $f(x, y)$ maßgebenden Bedingungen entsprechen. Insbesondere werden sich also diese Funktionen sämtlich in jedem Punkte (x, b) analytisch verhalten. Bildet man nun die zugehörigen Integrale I_k und setzt man die Summe

$$\sum_k I_k = \Psi(x, y)$$

an, so wird sich diese Funktion in der Nähe eines Punktes (x, b), wie folgt, verhalten.

Wir bezeichnen mit

$$L(y) = \frac{1}{2\pi i} \log (b - y)$$

einen Zweig der rechter Hand stehenden Funktion, dessen Verzweigungsschnitt in der Nähe von b mit einer besonderen der Kurven l_k zusammenfällt. Durch die Kurven l_k wird die Umgebung σ von b in mehrere Bereiche $R_n, R_p, \ldots$ eingeteilt. Und nun wird I_k im Innern eines Bereiches (S', R_n) durch die Formel

$$I_k = f_k(x, y)\{L(y) + m_{kn}\} + \mathfrak{A}_k(x, y)$$

dargestellt, wobei $\mathfrak{A}_k(x, y)$ sich im Punkte (x, b) analytisch verhält und m_{kn} eine ganze Zahl bedeutet, welche bei festbleibendem k ein und denselben Wert hat, so lange y nur in R_n verbleibt, aber ihren Wert mit n ändern kann.

Verlangen wir nun noch, daß die Gleichung

$$f_n(x, y) + f_p(x, y) + \cdots = 0$$

in σ identisch erfüllt werde. Dann wird

$$\Psi(x, y) = \sum_k \{m_{kn} f_k(x, y) + \mathfrak{A}_k(x, y)\}.$$

Hieraus ergibt sich, daß dasjenige Funktionselement, welches im Bereiche (S, R_n) durch die Funktion $\Psi(x, y)$ dargestellt wird, sich über den ganzen Bereich (S', σ) hin analytisch fortsetzen läßt.

§ 23. Fortsetzung. Ein Hilfssatz.

Wir wollen nun einen ein- oder mehrfach zusammenhängenden regulären Bereich S der y-Ebene betrachten. Derselbe werde in reguläre Teilbereiche $R_1, R_2, \ldots$, etwa nach Bd. I, Kap. 5, § 9, zerlegt, und jedem R_i werde eine im Innern des Zylinderbereiches (S', R_i) meromorphe Funktion[1]) $f_i(x, y)$ zugeordnet. Außerdem soll sich $f_i(x, y)$ in denjenigen Randpunkten (x, y) von (S', R_i), wofür y am Rande von R_j $(j \neq i)$ und x innerhalb S' liegt, meromorph verhalten.

Seien R_n, R_p zwei benachbarte Bereiche, und sei l_{np} die gemeinsame Begrenzung derselben. Letztere soll im besonderen aus einer nicht-geschlossenen einfachen regulären Kurve bestehen.[2]) Sei t ein Punkt von l_{np}, und sei x ein Punkt von S'. Dann geht schon aus der Voraussetzung hervor, daß die Funktion

$$1) \qquad f_p(x, y) - f_n(x, y)$$

im Punkte (x, t) keine höhere als eine außerwesentliche bzw. eine hebbare singuläre Stelle besitzen kann. Wir wollen den Funktionen $f_i(x, y)$ nun noch die weitere Bedingung auferlegen, daß diese Differenz in der Nähe des genannten Punktes höchstens hebbare Singularitäten aufweise und sich also zu einer dort analytischen Funktion ergänzen lasse. Es sei uns gestattet, die also ergänzte Funktion in der Form

$$\{f_p(x, y) - f_n(x, y)\}$$

zu schreiben.

Die Funktion I_{np}. Wir bilden jetzt die Funktion

$$2) \qquad I_{np} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{np}} \frac{\{f_p(x, t) - f_n(x, t)\}}{t - y}\, dt,$$

---

1) Wir schließen uns der Cousinschen Bezeichnungsweise immer noch an. Demnach entspricht erst die Differenz zweier Funktionen des gegenwärtigen Paragraphen, $f_n(x, y) - f_p(x, y)$, der Funktion $f_i(x, y)$ von § 22.

2) Bei den Anwendungen handelt es sich nämlich um Teilbereiche R_i, welche entweder Quadrate, sofern der Satz von Bd. I, Kap. 5, § 3 in Betracht kommt, oder höchstens Bereiche σ von normalem Typus, Bd. I, Kap. 5, § 9, sind. Darum wollen wir uns auch auf diesen Fall beschränken und dem Leser etwaige Verallgemeinerungen überlassen, falls er sich dafür interessieren sollte.

wobei das Integral in demjenigen Sinne über l_{np} hin erstreckt werde, welcher einer positiven Umkreisung des Bereiches R_n entspricht. Dann erkennt man vor allem, daß

$$I_{np} = I_{pn}. \tag{3}$$

Die Funktion I_{np} ist im Zylinderbereich (S', T_{np}), wobei T_{np} die ganze y-Ebene exklusive der Punkte von l_{np} bedeutet, eindeutig erklärt und verhält sich dort analytisch. Setzt man I_{np} über (S', R_n) hinaus in (S', R_p) analytisch fort, so geht I_{np} nach § 22, (3) in

$$I_{np} + \{f_p(x, y) - f_n(x, y)\} \tag{4}$$

über.

Die Funktionen $\Phi(x, y)$, $\varphi_n(x, y)$. Wir bilden ferner für je zwei benachbarte Bereiche R_n und R_p die Summe

$$\Sigma I_{np} = \Phi(x, y). \tag{5}$$

Dieselbe definiert eindeutig in jedem inneren Punkte eines jeden Bereiches (S', R_n) eine daselbst analytische Funktion mit denselben Eigenschaften wie die Funktion $\Psi(x, y)$ von § 22. Im Bereiche (S', R_n) werde dieselbe mit $\varphi_n(x, y)$ bezeichnet:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y), \qquad (x, y) \text{ in } (S', R_n). \tag{6}$$

Nach den Ergebnissen von § 22, Ende, läßt sich $\varphi_n(x, y)$ über die ganze innerhalb des Bereiches (S', S) belegene gemeinsame Begrenzung der Bereiche (S', R_n) und (S', R_p) hinaus analytisch fortsetzen. Da jede Funktion I_{rs} außer I_{np} dabei in sich selbst übergeht, so hat die bewußte Fortsetzung im Bereiche (S', R_p) den Wert[1])

$$\Phi(x, y) + \{f_p(x, y) - f_n(x, y)\}. \tag{7}$$

---

1) Genauer gesagt fassen wir einen Punkt (x', t) ins Auge, wo x' in S' liegt und t ein mit keinem Endpunkte von l_{np} zusammenfallender Punkt dieser Strecke ist. In der Umgebung von (x', t) gilt dann die Formel 7).

In der Umgebung σ eines Punktes (x', b), wo x' in S' liegt und b ein zum Rande von S gehöriger Endpunkt von l_{np} ist, wird

$$\Phi(x, y) = \frac{\{f_p(x, y) - f_n(x, y)\}}{2\pi i} \log \frac{b - y}{a - y} + \mathfrak{A}(x, y),$$

wo $\mathfrak{A}(x, y)$ sich in σ analytisch verhält. Hieraus erkennt man, daß die Bestimmungen von $\Phi(x, y)$ in R_n und R_p, d. h. die Funktionen $\varphi_n(x, y)$ und $\varphi_p(x, y)$, im allgemeinen über einen solchen Punkt (x', b) hinaus keine analytische Fortsetzung zulassen.

Diesen Sachverhalt können wir auch durch folgende Bezeichnung kurz zum Ausdruck bringen:

8) $$\varphi_n(x, y)\,|_{\rightarrow R_p} = \varphi_p(x, y) + \{f_p(x, y) - f_n(x, y)\}\,.$$

Mit diesem Resultat sind wir nun gleich am Ziele. Es bleibt nur noch übrig, eine Funktion $F(x, y)$, wie folgt, einzuführen:

9) $$F(x, y) = \varphi_n(x, y) + f_n(x, y).$$

Dieselbe ist zunächst im Innern eines jeden Bereiches (S', R_n) überall da eindeutig definiert, wo $f_n(x, y)$ definiert ist, und weist dort außerdem dieselben Singularitäten wie $f_n(x, y)$ auf, da $\varphi_n(x, y)$ sich ja im genannten Bereiche analytisch verhält. Setzt man ferner $F(x, y)$ aus einem Bereiche (S', R_n) in einen benachbarten Bereich (S', R_p) analytisch fort, so fällt die also erhaltene analytische Fortsetzung mit der durch 9) in (S', R_p) definierten Funktion $F(x, y)$ zusammen. Hiermit sind wir nunmehr zu folgenden Ergebnissen gelangt.

Hilfssatz. *Seien S', S ein- oder mehrfach zusammenhängende Bereiche der x- resp. y-Ebene, und sei S außerdem regulär. Letzterer möge noch in eine endliche Anzahl weiterer regulärer Bereiche R_n zerlegt werden.*[1] *Jedem Zylinderbereiche (S', R_n) werde eine Funktion $f_n(x, y)$ von der folgenden Beschaffenheit zugeordnet.*

a) *Ist x_0 ein beliebiger innerer Punkt von S' und y_0 ein beliebiger innerer oder Randpunkt von R_n, so soll sich $f_n(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0) meromorph verhalten.*[2]

b) *Im Falle y_0 am Rande sowohl von R_n als von R_p liegt, soll die Differenz*

$$f_p(x, y) - f_n(x, y)$$

in der Nähe der Stelle (x_0, y_0) höchstens hebbare Unstetigkeiten aufweisen und sich somit nach geeigneter Erklärung in den genannten Stellen im Punkte (x_0, y_0) analytisch verhalten.

Alsdann gibt es eine im Zylinderbereiche (S', S) meromorphe Funktion $F(x, y)$ derart, daß die Funktion

$$F(x, y) - f_n(x, y)$$

---

1) Man vergleiche die Anmerkung, S. 201.

2) Am Rande von S liegt eine endliche Anzahl von Punkten, in denen zwei oder mehrere Bereiche R_n zusammenstoßen. Ist y_0 ein sonstiger Randpunkt von S, und liegt x' in S', so braucht man keine Voraussetzung über das Verhalten der Funktion im Punkte (x_0, y_0) zu machen.

sich in jedem Punkte (x_0, y_0) *von* (S', R_n) *bis auf hebbare Singularitäten analytisch verhält, wo* x_0 *im Innern von* S', *und* y_0 *nur nicht am Rande von* S *liegt.*

Der Satz nebst Beweisen gilt noch unverändert für den Fall, daß n *Argumente* $x_1, \ldots, x_n$ *an Stelle von* x *treten, welche dann resp. auf Bereiche* $S'_1, \ldots, S'_n$ *ihrer bezüglichen Ebenen beschränkt werden. Der Bereich* S *der Variabelen* y *soll nach wie vor regulär sein.*[1])

§ 24. Eine Verallgemeinerung des Mittag-Lefflerschen Satzes.

Wir sind jetzt imstande, den Mittag-Lefflerschen Satz von Bd. I, Kap. 11, § 11 auf Funktionen mehrerer Veränderlichen auszudehnen. Zu dem Zwecke machen wir vor allem auf nachstehende notwendige Bedingungen aufmerksam.

Zwei Funktionen, $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, deren beide sich in einem Punkte (a, b) meromorph verhalten, mögen *im Punkte* (a, b) *miteinander äquivalent in bezug auf Subtraktion* heißen, falls die Differenz

$$\varphi(x, y) - \psi(x, y)$$

in der Nähe von (a, b) höchstens hebbare Singularitäten aufweist.

Sei $F(x, y)$ im ganzen endlichen Raume meromorph. Dann kann man jedem Punkte (a, b) dieses Raumes eine Funktion $f_{ab}(x, y)$ von folgender Beschaffenheit zuordnen.

i) $f_{ab}(x, y)$ verhält sich im Punkte (a, b) meromorph und ist dort mit $F(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion. Bezeichnen wir mit

$$T_{ab}: \qquad |x - a| < h_{ab}, \qquad |y - b| < h_{ab},$$

eine Umgebung des Punktes (a, b), worin die genannte Funktion diese Eigenschaft aufweist.

ii) Ist (a', b') ein Punkt von T_{ab}, so ist dort $f_{a'b'}(x, y)$ mit $f_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion.

Der Satz, worum es sich handelt, besteht nun geradezu in der Umkehrung dieser beiden Bedingungen.

Theorem.[2]) *Jedem Punkte* (a, b) *des endlichen Raumes werde eine Funktion* $f_{ab}(x, y)$ *zugeordnet, welche sich in einer Umgebung*

---

1) Allgemeiner darf der Punkt $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ in einem beliebigen Bereiche des $2n$-dimensionalen Raumes dieser Variabelen liegen.

2) Cousin, *Acta Mathematica* 19 (1895) S. 56. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist bereits von Appell, *Acta Mathematica* 2 (1883) S. 71, behandelt worden.

T_{ab} dieses Punktes meromorph verhält. Ist fernerhin (a', b') ein Punkt von T_{ab}, so sollen $f_{ab}(x, y)$ und $f_{a'b'}(x, y)$ in (a', b') miteinander äquivalent in bezug auf Subtraktion sein. Dann gibt es eine Funktion $F(x, y)$, welche sich im ganzen endlichen Raume meromorph verhält und in jedem Punkte (a, b) mit der zugehörigen Funktion $f_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.

Wir bezeichnen mit Σ_R den abgeschlossenen Zylinderbereich (S', S),

$$S'\colon\ |\Re(x)| \leqq R, \quad \left|\Re\left(\frac{x}{i}\right)\right| \leqq R; \qquad S\colon\ |\Re(y)| \leqq R, \quad \left|\Re\left(\frac{y}{i}\right)\right| \leqq R.$$

Indem wir jedes Quadrat in 2^{2n} gleiche Quadrate einteilen, bezeichnen wir eines der kleinen Quadrate von S', S resp. mit q'_α, q_β. Und nun behaupte ich: wird n genügend groß gewählt (und dann festgehalten), so entspricht jedem Zylinderbereiche (q'_α, q_β) ein Bereich T_{ab}, welcher (q'_α, q_β) im Innern enthält.

Zum Beweise nehme man an, die Behauptung sei falsch, und teile S', S je in vier gleiche Quadrate. Dementsprechend wird Σ_R in 16 gleiche Zylinderbereiche eingeteilt. Für mindestens einen letzterer Bereiche wird nun die entsprechende Behauptung ebenfalls falsch sein. Ein solcher Bereich wird jetzt derselben Überlegung unterworfen, wodurch dann wieder ein Teilbereich entsteht, wofür die Behauptung nicht gilt.

Indem man nun das Verfahren unbegrenzt fortsetzt, wird man zu einem allen der ausgezeichneten Teilbereiche gemeinsamen Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ geführt, in dessen jeder Nähe es einen Zylinderbereich gibt (nämlich einen der bewußten Teilbereiche), wofür die Behauptung nicht gilt. Dies widerspricht aber dem Tatbestande, denn dem Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ entsprechen ja ein Bereich $T_{\bar{x}\bar{y}}$ und eine Funktion $f_{\bar{x}\bar{y}}(x, y)$, welche das Ergebnis unmöglich machen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Hilfssatz von § 23 anzuwenden. Sei q'_α ein beliebiges der der bewußten Einteilung des Quadrats S' entsprechenden Quadrate, und sei Q'_α ein etwas größeres, q'_α im Innern enthaltendes Quadrat. Als Bereich S' des Hilfssatzes nehmen wir nun Q'_α, als S dagegen das Quadrat S, und als die Bereiche R_n endlich die Quadrate q_β. Nachträglich hat man noch dafür zu sorgen, daß Q'_α soweit eingeschränkt wird, daß der Bereich (Q'_α, q_β), wo β beliebig ist, stets innerhalb des den Bereich (q'_α, q_β) enthaltenden Bereiches T_{ab} liegt. Das Ergebnis ist nun eine Funktion $f_\alpha(x, y)$, welche sich in jedem inneren

Punkte (a, b) des Bereiches (Q'_α, S) meromorph verhält und daselbst mit der vorgelegten Funktion $f_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.

Alsdann wird man den Hilfssatz von neuem anwenden, indem man jetzt x und y ihre Rollen vertauschen läßt. Als die Bereiche S', S des Hilfssatzes werden nun die Quadrate S resp. S' genommen, während die Bereiche R_n durch q'_α vertreten werden. Das Endresultat kann man, wie folgt, formulieren. *Unter den Bedingungen des vorstehenden Theorems gibt es eine Funktion $\Phi_R(x, y)$, welche sich im Innern des Bereiches Σ_R meromorph verhält und in jedem inneren Punkte (a, b) desselben mit der zugehörigen Funktion $f_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.*

Der Satz läßt eine ersichtliche Erweiterung zu, indem man ihn auf den *abgeschlossenen* Bereich Σ_R ausdehnt. Zum Beweise braucht man nur $R' > R$ anzunehmen und die Funktion $\Phi_{R'}(x, y)$ in Σ_R zu betrachten.

Es ist jetzt nur noch ein kurzer Schritt zum Beweise des Theorems. Wir bilden nämlich die Funktionen $\Phi_R(x, y)$ für eine ins Unendliche wachsende Reihe von R-Werten, indem wir jedesmal den abgeschlossenen Bereich Σ_R zugrunde legen. Insbesondere sei $R = 1, 2, \ldots$

Die Funktion

$$\Phi_{m+1}(x, y) - \Phi_m(x, y) = \Omega_m(x, y)$$

verhält sich nach Ergänzung in den hebbaren Singularitäten analytisch im abgeschlossenen Bereiche Σ_m. Entwickelt man dieselbe dort nach dem Taylorschen Lehrsatze, so wird die dadurch sich ergebende Reihe im Bereiche

$$\Sigma'_m: \qquad |x| \leqq m, \qquad |y| \leqq m$$

gleichmäßig konvergieren.

Sei

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Dann wird man die bewußte Potenzreihe so zerlegen können:

$$\Omega_m(x, y) = P_m(x, y) + R_m(x, y),$$

daß der Rest, $R_m(x, y)$, in Σ'_m der Bedingung

$$|R_m(x, y)| < \varepsilon_m$$

genügt. Dabei bedeutet $P_m(x, y)$ ein Polynom.

Jetzt wollen wir die Funktionen $\Phi_m(x, y)$ durch geeignetere äquivalente Funktionen $F_m(x, y)$, wie folgt, ersetzen. Sei

$$F_1(x, y) = \Phi_1(x, y);$$

$$F_m(x, y) = \Phi_m(x, y) - \sum_{k=1}^{m-1} P_k(x, y), \qquad 2 \leqq m.$$

Es ergibt sich, daß

$$(1) \qquad F_{m+1}(x, y) - F_m(x, y) = R_m(x, y).$$

Die Funktion $F_m(x, y)$ ist offenbar im Bereiche Σ'_m mit $\Phi_m(x, y)$ äquivalent, und dasselbe gilt auch von der Funktion

$$(2) \qquad F(x, y) = F_m(x, y) + \sum_{k=m}^{\infty} R_k(x, y),$$

da das letzte Glied eine in Σ'_m gleichmäßig konvergierende Reihe ist, deren Glieder sich dort analytisch verhalten.

Sei M eine beliebige natürliche Zahl. Wir bilden die Funktion $F(x, y)$ einmal für $m \geqq M$, sodann aber für $m + r$, $r > 0$, und betrachten die Differenz dieser beiden Bestimmungen im Bereiche Σ'_M:

$$F_{m+r} + \sum_{k=m+r}^{\infty} R_k - F_m - \sum_{k=m}^{\infty} R_k = F_{m+r} - F_m - \sum_{k=m}^{m+r-1} R_k.$$

Aus (1) ergibt sich, daß letztere Funktion in Σ'_M identisch verschwindet.

Hiermit sind wir zu folgenden Ergebnissen gelangt. Durch die Formel (2) wird zunächst für den Fall $m = 1$ eine Funktion $F(x, y)$ im Bereiche Σ'_1 vorgestellt, welche sich dann bis auf außerwesentliche singuläre Stellen über den ganzen endlichen Raum hin analytisch fortsetzen läßt und im Bereiche Σ'_m mit der durch die Formel (2) daselbst dargestellten Funktion äquivalent (weil identisch) ist. Demgemäß wird diese monogene analytische Funktion auch in jedem Punkte (a, b) des Raumes mit der zugehörigen Funktion $f_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Subtraktion sein, und hiermit ist der Beweis des Satzes vollständig geliefert.

Der erweiterte Satz. Der vorstehende Satz läßt sich nach zwei Richtungen hin erweitern. Erstens gilt er unverändert für Funktionen beliebig vieler Variabelen. In der Tat genügt die

vorstehende Methode ohne Modifikation zur Begründung dieser Verallgemeinerung.

Zweitens sei ein beliebiger Zylinderbereich $(T_1, \ldots, T_n)$ vorgelegt, wobei T_k bloß ein Kontinuum der eigentlichen z_k-Ebene bedeutet, und man ordne jedem Punkte dieses Bereiches (wozu ja kein Randpunkt gehört) eine sich dort meromorph verhaltende Funktion zu. Dann gibt es eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche überall da im Bereiche, wo sie definiert ist, eindeutig ist und in jedem Punkte des Bereiches mit der diesem Punkte zugeordneten Funktion äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.

Im besonderen Falle, daß jeder Bereich T_k aus dem Einheitskreise $|z_k| < 1$ besteht, kann man den Beweis geradeso wie vorhin führen, indem man als Σ_R den Bereich

$$|z_k| \leqq R, \qquad 0 < R < 1, \qquad\qquad k=1,\ldots,n,$$

nimmt, und R dann etwa gleich $1 - 1/(m+1)$, $m=1,2,\ldots$, setzt.

Der allgemeine Fall, daß jeder Bereich T_k einfach zusammenhängt, läßt sich nun ohne weiteres durch konforme Abbildung auf diesen Fall zurückführen.

Hängt dagegen einer der Bereiche T_k mehrfach zusammen, so wird man jeden Bereich T_k nach der Methode von Bd. I, Kap. 5, § 3 in eine Reihe regulärer Bereiche $T_k^{(l)}$, $l=1,2,\ldots$, entwickeln und eine Funktion $\Phi_m(z_1, \ldots, z_n)$ aufstellen, welche dem Zylinderbereiche $(T_1^{(m)}, \ldots, T_n^{(m)})$ entspricht.[1]) Die Differenz

$$\Phi_{m+1}(z_1, \ldots, z_n) - \Phi_m(z_1, \ldots, z_n) = \Omega_m(z_1, \ldots, z_n)$$

verhält sich dann (nach Ergänzung in etwaigen hebbaren singulären Stellen) ausnahmslos analytisch im abgeschlossenen Bereiche

$$(T_1^{(m)}, \ldots, T_n^{(m)}).$$

Nun lassen sich andererseits die Bd. I, Kap. 11, § 15 dargestellten Entwicklungsmethoden ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Variabelen ausdehnen, welche in abgeschlossenen Zylinderbereichen betrachtet werden. Demgemäß kann die Funktion $\Omega_m(z_1, \ldots, z_n)$ im abgeschlossenen Bereiche $(T_1^{(m)}, \ldots, T_n^{(m)})$ durch eine im Innern des Bereiches $(T_1, \ldots, T_n)$ analytische Funktion

1) Diese Methode kann man auch im Falle lauter einfach zusammenhängender Bereiche benützen.

$P_m(z_1, \ldots, z_n)$ gleichmäßig angenähert werden. Hiermit erhält man die Zerlegung

$$\Phi_{m+1} - \Phi_m = P_m + R_m,$$

wobei $R_m(z_1, \ldots, z_n)$ sich im abgeschlossenen Bereiche $(T_1^{(m)}, \ldots, T_n^{(m)})$ analytisch verhält und daselbst

$$| R_m(z_1, \ldots, z_n) | < \varepsilon_n.$$

Von hier ab verläuft der Beweis, wie vorhin.

Es sei noch hervorgehoben, daß wir den Mittag-Lefflerschen Satz von Bd. I, Kap. 11, § 12 zwar für einen beliebigen *Zylinderbereich,* nicht aber für einen allgemeinen Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes verallgemeinert haben.

§ 25. Über Funktionen mit vorgeschriebenen Nullgebilden.

Wir wenden uns jetzt zu einer Verallgemeinerung des Weierstraßschen Satzes vom Jahre 1876, Bd. I, Kap. 11, § 10. Sei $G(x, y)$ eine ganze Funktion, welche Wurzeln besitzt und nicht identisch verschwindet. Ist (a, b) eine Wurzel von G, so kann man die Funktion in der Nähe dieser Stelle vermöge des Weierstraßschen Satzes, Kap. 2, § 2, in der Form darstellen:

$$G(x, y) = P(w, z)\, \Omega(w, z),$$

wobei $P(w, z)$ ein ausgezeichnetes Pseudopolynom mit der Spitze im Anfang bedeutet:

$$P(w, z) = w^m + A_1(z) w^{m-1} + \cdots + A_m(z),$$

und x, y linear von w, z abhängen.

Sind zwei Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ in einem Punkte (a, b) analytisch und verschwindet keine davon identisch, so heißen sie *im Punkte (a, b) miteinander äquivalent in bezug auf Division,* falls der Quotient

$$\frac{u(x, y)}{v(x, y)}$$

in der Nähe des Punktes (a, b) höchstens hebbare Singularitäten aufweist und die ergänzte Funktion dort nicht verschwindet.

Den Bedingungen i), ii) von § 24 entsprechend finden wir auch hier zwei notwendige Bedingungen für eine ganze Funktion $G(x, y)$:

i) Jedem Punkte (a, b) des Raumes läßt sich eine Funktion $u_{ab}(x, y)$ zuordnen, welche sich im Punkte (a, b) analytisch verhält und dort mit $G(x, y)$ äquivalent in bezug auf Division ist. Bezeichnen wir mit

$$T_{ab}: \qquad |x-a| < h_{ab}, \qquad |y-b| < h_{ab}$$

eine Umgebung der Stelle (a, b), worin die genannte Funktion diese Eigenschaft aufweist.

ii) Ist (a', b') ein beliebiger Punkt von T_{ab}, so ist dort $u_{a'b'}(x, y)$ mit $u_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Division.

Diese Bedingungen lassen sich nun in folgender Weise umkehren.

Theorem.[1]) *Jedem Punkte (a, b) des endlichen Raumes werde eine Funktion $u_{ab}(x, y)$ zugeordnet, welche sich in einer Umgebung T_{ab} dieses Punktes analytisch verhält. Ist fernerhin (a', b') ein Punkt von T_{ab}, so sollen $u_{ab}(x, y)$ und $u_{a'b'}(x, y)$ in (a', b') miteinander in bezug auf Division äquivalent sein. Dann gibt es eine ganze Funktion $G(x, y)$, welche in jedem Punkte (a, b) mit der zugehörigen Funktion $u_{ab}(x, y)$ äquivalent in bezug auf Division ist.*

Zum Beweise bezeichnen wir wieder mit Σ_R den abgeschlossenen Zylinderbereich

$$\Sigma_R: \quad |\Re(x)| \leqq R, \quad \left|\Re\left(\frac{x}{i}\right)\right| \leqq R, \quad |\Re(y)| \leqq R, \quad \left|\Re\left(\frac{y}{i}\right)\right| \leqq R,$$

wobei R eine beliebige positive Zahl bedeutet. Jedem Punkte (a, b) von Σ_R entspricht nach i) eine positive Zahl h_{ab}. Wie in § 24, so erkennt man auch hier, daß es eine positive konstante Zahl h gibt, welche jedem dieser Punkte gleichmäßig zugeordnet werden kann. Greifen zwei Bereiche T_{ab} und $T_{a'b'}$ übereinander und bezeichnet man den gemeinsamen Teil mit T, so werden die Funktionen $u_{ab}(x, y)$ und $u_{a'b'}(x, y)$ in jedem inneren Punkte von T miteinander äquivalent sein. Nun werden die x- und y-Ebenen in Quadratnetze eingeteilt, wobei die Länge einer Diagonale kleiner als $\frac{1}{2}h$ sein soll, und die Komplexe von Quadraten, q'_α und q_β, werden gerade so wie vorhin definiert.

Wir brauchen jetzt das Analogon des Hilfssatzes von § 24. Dieser Satz lautet, wie folgt:

1) Cousin a. a. O. S. 56.

Hilfssatz. *Sei S' ein beliebiger einfach zusammenhängender Bereich der x-Ebene, und sei S ein regulärer ein- oder mehrfach zusammenhängender Bereich der y-Ebene. Letzterer möge noch in eine endliche Anzahl einfach zusammenhängender regulärer Bereiche R_n zerlegt werden. Jedem Zylinderbereiche (S', R_n) werde eine Funktion $u_n(x, y)$ von folgender Beschaffenheit zugeordnet:*

a) *Ist x_0 ein beliebiger innerer Punkt von S' und y_0 ein beliebiger innerer oder Randpunkt von R_n, so soll sich $u_n(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0) analytisch verhalten*[1]*;*

b) *Im Falle y_0 am Rande sowohl von R_n als von R_p liegt, sollen $u_n(x, y)$ und $u_p(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0) miteinander äquivalent in bezug auf Division sein.*

Alsdann gibt es eine im Zylinderbereiche (S', S) analytische Funktion $H(x, y)$, welche in jedem Punkte (x_0, y_0) von (S', R_n) mit $u_n(x, y)$ in bezug auf Division äquivalent ist, wo x_0 im Innern von S' und y_0 nur nicht am Rande von S liegt.

Der Satz nebst Beweis gilt noch unverändert für den Fall, daß n Argumente $x_1, \ldots, x_n$ an Stelle von x treten, welche dann bzw. auf einfach zusammenhängende Bereiche $S'_1, \ldots, S'_n$ ihrer bezüglichen Ebenen beschränkt werden. Der Bereich S der Variabelen y soll nach wie vor regulär sein und ein- oder mehrfach zusammenhängen.[2]

Behufs des Beweises sei l_{np} die gemeinsame Begrenzung zweier benachbarten Bereiche R_n und R_p, welche wiederum so angenommen werden mögen, wie vorhin in § 23. Dann gibt es einen l_{np} im Innern umfassenden einfach zusammenhängenden Bereich τ der y-Ebene derart, daß die Funktion

$$\frac{u_p(x, y)}{u_n(x, y)} = g_{np}(x, y)$$

sich im einfach zusammenhängenden Zylinderbereiche (S', τ) bis auf hebbare Singularitäten analytisch verhält und die also ergänzte Funktion, welche durch das nämliche Symbol, $g_{np}(x, y)$, bezeichnet werde, dort nicht verschwindet. Demnach wird die Funktion $\log g_{np}(x, y)$ einen daselbst analytischen Zweig

$$G_{np}(x, y) = \log g_{np}(x, y)$$

haben.

---

1) Die in der Anmerkung 2), S. 253 vermerkte Verallgemeinerung hat auch hier statt.

2) Es findet auch hier die Verallgemeinerung von S. 254, Anm. 1), statt, wobei jedoch der Bereich der Punkte (x) jetzt einfach zusammenhängen muß.

Hieraus werde nun die Funktion

$$I_{np} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_{np}} \frac{G_{np}(x, t)}{t - y}\, dt$$

gebildet. Dieselbe subsumiert sich unter den in § 23 behandelten Integralen. Wir bilden noch, ähnlich wie in § 23, die weitere Funktion[1])

$$\Phi(x, y) = \sum I_{np}(x, y).$$

Nach den damaligen Entwicklungen läßt sich also $\Phi(x, y)$ aus dem Bereiche (S', R_n) in den benachbarten Bereich (S', R_p) analytisch fortsetzen, und zwar geht $\Phi(x, y)$ dabei über in

$$\Phi(x, y) + G_{np}(x, y).$$

Fassen wir einen inneren Punkt b von S ins Auge, an welchen mehrere Bereiche R_n — sagen wir der Bestimmtheit halber $R_1, \ldots, R_4$ — anstoßen und dabei die Umgebung von b völlig erschöpfen. Wird dann $L(y)$ wie früher definiert, und liegt y in der Nähe von b, so wird

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) = \mathfrak{B}(x, y) + [G_{12} + G_{23} + G_{34} + G_{41}]\, L(y) \\ + m_{12}^{(i)} G_{12} + m_{23}^{(i)} G_{23} + m_{34}^{(i)} G_{34} + m_{41}^{(i)} G_{41},\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{B}(x, y)$ sich analytisch verhält und $m_{12}^{(i)}, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten, welche ein und denselben Wert beibehalten, so lange nur y in R_i bleibt, sich aber ändern können, wenn y einen anderen Bereich R_j betritt.

Die eckige Klammer hat den Wert

$$\begin{aligned}G_{12} + \cdots + G_{41} &= \log\frac{u_2}{u_1} + \log\frac{u_3}{u_2} + \log\frac{u_4}{u_3} + \log\frac{u_1}{u_4} \\ &= \log 1 = 2\pi i K,\end{aligned}$$

wobei K eine ganze Zahl bedeutet. Mithin wird durch die Differenz

$$\Phi(x, y) - 2\pi i K L(y)$$

eine im Bereiche (S', R_i) analytische Funktion definiert, welche eine analytische Fortsetzung über den ganzen Bereich (S', σ) hin gestattet, wobei σ eine geeignete Umgebung der Stelle b vorstellt.

---

1) Cousin a. a. O. S. 17. Die Cousinsche Bezeichnungsweise noch weiter beizubehalten, ist nicht ratsam.

Jetzt sieht man, wie man die Funktion $\Phi(x, y)$ allgemein zu modifizieren hat. Man bilde nämlich $2\pi i K L(y)$ für jeden in S gelegenen Knotenpunkt und ziehe diesen Ausdruck von $\Phi(x, y)$ ab. So entsteht eine Funktion

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - 2\pi i \Sigma K L(y).$$

Sei

$$\psi_n(x, y) = \Psi(x, y) \quad \text{in} \quad (S', R_n).$$

Dann läßt sich $\psi_n(x, y)$ über (S', R_n) hinaus in (S', R_p) analytisch fortsetzen, und zwar ist

$$\psi_n(x, y)\,|_{\longrightarrow R_p} = \psi_p(x, y) + G_{np}(x, y) + 2m\pi i,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Es bleibt nur noch übrig, die Funktion

$$H(x, y) = u_n(x, y)\, e^{\psi_n(x, y)}$$

zu bilden. Setzt man diese aus dem Bereiche (S', R_n) in (S', R_p) analytisch fort, so kommt

$$u_n(x, y)\, e^{\psi_p(x, y) + G_{np}(x, y)} = u_p(x, y)\, e^{\psi_p(x, y)}.$$

Hiermit erweist sich $H(x, y)$ als die vom Hilfssatze verlangte Funktion.

Kehren wir nunmehr zum Beweise des Hauptsatzes zurück! Von hier ab verläuft die Schlußweise der früheren zur Begründung des Satzes von § 24 benützten genau parallel. Wir erhalten zunächst, analog wie früher, das Resultat: *Unter den Bedingungen des vorstehenden Theorems gibt es eine Funktion $H_R(x, y)$, welche sich im abgeschlossenen Bereich Σ_R analytisch verhält und in jedem Punkte (a, b) desselben mit der zugehörigen Funktion $u_{ab}(x, y)$ in bezug auf Division äquivalent ist.*

Hierauf setzen wir $R = m = 1, 2, 3, \ldots$ und bilden die Funktion

$$\frac{H_{m+1}(x, y)}{H_m(x, y)} = \Omega_m(x, y).$$

Letztere Funktion verhält sich analytisch im Bereiche Σ_m und verschwindet dort nicht. Demgemäß läßt sich dieselbe in der Form

$$\Omega_m = e^{X_m}$$

darstellen, wobei $X_m(x, y)$ sich ebenfalls in Σ_m analytisch verhält.

Jetzt werde X_m nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt. Indem man diese Reihe so spaltet, daß der Rest derselben im Bereiche

$$\Sigma'_m: \qquad |x| \leqq m, \qquad |y| \leqq m,$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als ε_m bleibt:

$$X_m = P_m + R_m, \qquad |R_m| < \varepsilon_m,$$

mögen dann neue Funktionen $G_m(x, y)$ an Stelle von $H_m(x, y)$, wie folgt, eingeführt werden:

$$G_1(x, y) = H_1(x, y), \qquad G_m = H_m e^{-\sum\limits_{k=1}^{m-1} P_k}, \qquad 2 \leqq m.$$

Dann wird

$$\frac{G_{m+1}}{G_m} = e^{R_m}.$$

Die in Aussicht gestellte Funktion $G(x, y)$ wird endlich durch die Formel definiert:

$$G(x, y) = G_m(x, y)\, e^{\sum\limits_{k=m}^{\infty} R_m(x, y)}.$$

Es wird nämlich genau so wie im früheren Falle gezeigt, daß $G(x, y)$ in einem beliebigen Σ'_M nicht mehr von m abhängt, sobald nur $m \geqq M$ genommen wird, denn es ist ja in Σ'_M

$$\frac{G_{m+r}\, e^{\sum\limits_{k=m+r}^{\infty} R_k}}{G_m\, e^{\sum\limits_{k=m}^{\infty} R_k}} = \frac{G_{m+r}}{G_m} e^{-\sum\limits_{k=m}^{m+r-1} R_k} = 1.$$

Hiermit ist nun der Satz vollständig bewiesen.

Der erweiterte Satz. *Sei $(S_1, \ldots, S_n)$ ein einfach zusammenhängender Zylinderbereich des $(x_1, \ldots, x_n)$-Raumes, wobei S_k, $k=1,\ldots,n$, einen berandeten Bereich der erweiterten x_k-Ebene bedeutet.*[1] *Jedem inneren Punkte (a) von (S) werde ferner eine Funktion $u_{(a)}(x)$ zugeordnet, welche sich in einer bestimmten Umgebung $T_{(a)}$ von (a) analytisch verhält. Ist endlich (a') ein Punkt von $T_{(a)}$, so sollen $u_{(a)}(x)$ und $u_{(a')}(x)$ im Punkte (a') miteinander äquivalent in bezug auf Division sein.*

1) M. a. W. soll S_k zur Klasse a) oder b), Bd. I, S. 788, gehören.

Alsdann gibt es eine Funktion $G(x_1, \ldots, x_n)$, *welche sich analytisch in* (S) *verhält und in jedem Punkte* (a) *von* (S) *mit der zugehörigen Funktion* $u_{(a)}(x)$ *in bezug auf Division äquivalent ist.*

Im übrigen darf einer der Bereiche $S_1, \ldots, S_n$ *mehrfach zusammenhängen.*

Der Beweis wird gerade so geführt, wie im ähnlichen Falle, § 24, Ende.

Die Sätze von §§ 22—24 erscheinen im wesentlichen so, wie Cousin sie a. a. O. ausgesprochen und bewiesen hat. Dagegen ist den Sätzen von § 25 durch die Forderung des einfachen Zusammenhanges eine wesentliche Einschränkung auferlegt. Daß diese Sätze tatsächlich in dem Umfange, wie Cousin sie ausgesprochen hat, falsch sind, hat Gronwall[1]) durch ein Beispiel gezeigt.

§ 26. Von der Produktzerlegung ganzer Funktionen.

1. Satz. *Ist* $G(z_1, \ldots, z_n)$ *eine ganze Funktion, welche Wurzeln hat, ohne identisch zu verschwinden, so decken sich die Wurzeln von* G *mit den im Endlichen gelegenen Stellen eines oder mehrerer monogenen analytischen Gebilde* $(n-1)$*-ter Stufe,* $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \ldots$. *Insbesondere kann es dieser Gebilde auch unendlich viele geben, die dann aber eine abzählbare Menge bilden.*

Sei (a) eine Wurzel von G, und seien $\Gamma, \Gamma', \ldots$ die im Punkte (a) irreduktiblen Faktoren von G. Durch die Gleichung

$$\Gamma = 0 \tag{1}$$

wird dann ein monogenes analytisches Gebilde $(n-1)$-Stufe im Raume der n Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$ definiert. Bezeichnen wir dasselbe mit $\mathfrak{G}$.

Sei (b) eine zweite endliche Stelle von $\mathfrak{G}$. Dann läßt sich $\mathfrak{G}$ in der Nähe von (b) in der Form darstellen:

$$\Gamma_b(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{2}$$

wo Γ_b im Punkte (b) irreduktibel ist. Ich behaupte nun, $G(z_1, \ldots, z_n)$ ist im Punkte (b) durch $\Gamma_b(z_1, \ldots, z_n)$ teilbar.

Zum Beweise verbinde man (a) mit (b) durch eine ganz auf $\mathfrak{G}$ verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$, deren Bogenlänge, von (a) aus gemessen,

1) *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) 20 (1914), S. 173. *Transactions Amer. Math. Soc.* 18 (1917), S. 50.

mit s benannt werde. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $(z) = (\zeta)$ von $\mathfrak{C}$ wird $\mathfrak{G}$ durch eine Gleichung von der Form (1) oder (2):

$$\Gamma_\zeta(z_1, \ldots, z_n) = 0 \tag{3}$$

dargestellt. Liegt (ζ) in einer gewissen Umgebung von (a), so wird Γ und damit auch G im Punkte (ζ) durch Γ_ζ teilbar sein; vgl. Kap. 2, § 7, 3. Satz. Sollte letzteres nicht in jedem Punkte (ζ) von $\mathfrak{C}$ zutreffen, so sei s_1 die untere Grenze der den Ausnahmepunkten von $\mathfrak{C}$ entsprechenden s-Werte, und sei $(\zeta) = (c)$ der zugehörige Punkt von $\mathfrak{C}$. Dann gilt aber in der Nähe σ des Punktes (c) eine Darstellung von der Form

$$\Gamma_c(z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

Jetzt kann man einen Punkt (γ) von σ finden, welcher auf $\mathfrak{C}$ liegt und wofür $s < s_1$ ist. Sei

$$\Gamma_\gamma(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

die Darstellung von $\mathfrak{G}$ in der Nähe von (γ). Dann ist sowohl Γ_c als auch G in (γ) durch Γ_γ teilbar. Mithin ist G in (c) durch Γ_c teilbar; vgl. Kap. 2, § 7, 4. Satz. Dies verstößt aber gegen die Voraussetzung, daß es in jeder Umgebung von (c) Punkte (ζ) gibt, worin G durch Γ_ζ nicht teilbar sei.

Hiermit ist nun gezeigt, daß jede endliche Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}$ eine Nullstelle der Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$ liefert; m. a. W., daß der ganze endliche Teil des Gebildes $\mathfrak{G}$ auf dem Gebilde $G = 0$ liegt.

Sollte letzteres Gebilde durch eine endliche Anzahl von Gebilden $\mathfrak{G}$ nicht erschöpft werden, so betrachten wir etwa die Zylinderbereiche

$$\Sigma_m: \qquad |z_k| \leqq m, \qquad k=1, \ldots, n,$$

wobei m die natürlichen Zahlen durchläuft. Ein beliebiger dieser Bereiche wird höchstens von einer endlichen Anzahl von Gebilden $\mathfrak{G}$ durchsetzt. Sonst würde ein gewisses Σ_M eine Häufungsstelle $(z) = (z^0)$ von Punkten (z^i), $i=1,2,\ldots$, enthalten, welche alle auf verschiedenen $\mathfrak{G}$ lägen. Das ist aber unmöglich, denn durch die Umgebung einer willkürlichen Nullstelle von G gehen ja nur endliche viele $\mathfrak{G}$ hindurch.

Wir wollen nun diejenigen Gebilde, welche Punkte mit Σ_1 gemeinsam haben, mit

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{\mu_1}$$

bezeichnen. Sodann mögen die Gebilde, welche Punkte mit Σ_2, aber keine Punkte mit Σ_1 gemeinsam haben, mit

$$\mathfrak{G}_{\mu_1+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{\mu_2}$$

benannt werden; usw. Dabei können selbstverständlich die einer bestimmten Zeile entsprechenden Gebilde fehlen.

Definition. Sei $G(z_1, \ldots, z_n)$ eine ganze Funktion, welche Wurzeln hat, aber nicht identisch verschwindet. Läßt sich dann G in das Produkt zweier ganzen Funktionen spalten:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = G_1(z_1, \ldots, z_n)\, G_2(z_1, \ldots, z_n),$$

die beide Wurzeln haben, so heißt G *im Großen reduktibel,* oder, falls keine Verwechslung mit der früher definierten Reduktibilität im Kleinen zu befürchten steht, schlechtweg *reduktibel.*[1])

Läßt sich hingegen eine derartige ganze Funktion G nicht so zerlegen, so heißt G *im Großen irreduktibel* bzw. bloß *irreduktibel.*

Eine ganze Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$ heißt durch eine zweite nicht identisch verschwindende ganze Funktion $G_1(z_1, \ldots, z_n)$ *im Großen teilbar,* falls

$$G(z_1, \ldots, z_n) = Q(z_1, \ldots, z_n)\, G_1(z_1, \ldots, z_n)$$

ist, wobei $Q(z_1, \ldots, z_n)$ eine ganze Funktion bedeutet.

Wie man sieht, beziehen sich die Definitionen *reduktibel* und *irreduktibel* nicht auf alle, sondern nur auf solche ganzen Funktionen, welche Wurzeln haben, ohne identisch zu verschwinden. Dagegen ist jede ganze Funktion insbesondere *teilbar* durch eine ganze Funktion, welche keine Wurzeln hat, und die Null ist durch jede ganze Funktion außer der Null teilbar.

2. Satz.[2]) *Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebiges der im 1. Satze genannten analytischen Gebilde, so gibt es eine im Großen irreduktible ganze Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche in allen endlichen Stellen von $\mathfrak{G}$, sonst aber nirgends, verschwindet.*

---

1) Vgl. Gronwall, *Dissertation,* Upsala 1898, S. 7.

2) Gronwall a. a. O. Der Satz ist später auch von Hahn ausgesprochen und bewiesen worden, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 16 (1905), S. 29.

Der Beweis wird vermöge des Cousinschen Satzes von § 25 geführt. Dabei kommt es zuerst darauf an, jedem Punkte $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ des endlichen Raumes eine Funktion $u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ zuzuordnen, welche sich dort analytisch verhält, ferner in Punkten von $\mathfrak{G}$, sonst aber nirgends verschwindet, und endlich der Verträglichkeitsbedingung ii), § 25, genügt. Das geschieht wie folgt. Ist (ζ) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}$, so läßt sich $\mathfrak{G}$ in der Nähe von (ζ) durch eine Gleichung

$$\Gamma_\zeta(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

darstellen, wo Γ_ζ irreduktibel in (ζ) ist. Insbesondere kann es aber vorkommen, daß mehrere Zweige von $\mathfrak{G}$ durch (ζ) hindurchgehen. Da es deren aber nur eine endliche Anzahl gibt, so nimmt hier die Darstellung die Form an:

$$\prod_{k=1}^{l} \Gamma_\zeta^{(k)}(z_1, \ldots, z_n) = 0 .$$

Fällt nun (a) mit (ζ) zusammen, so sei

$$u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = \Gamma_\zeta(z_1, \ldots, z_n) \quad \text{bzw.} \quad = \prod_{k=1}^{l} \Gamma_\zeta^{(k)}(z_1, \ldots, z_n) .$$

Für jeden anderen Punkt (a) sei

$$u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = 1 .$$

Hiermit ist $u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte des Raumes definiert, und die also erhaltenen Funktionen genügen der Verträglichkeitsbedingung ii). Nach dem Cousinschen Satze gibt es also eine ganze Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche in den Punkten von $\mathfrak{G}$, sonst aber nirgends, verschwindet, und außerdem in jedem Punkte (a) von $\mathfrak{G}$ mit $u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ äquivalent in bezug auf Division ist.

Im übrigen erkennt man, daß die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ irreduktibel ist.

3. Satz. *Eine ganze Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$, welche eine Wurzel besitzt, ohne identisch zu verschwinden, läßt sich auf eine, und im wesentlichen nur auf eine Weise in ein endliches oder unendliches Produkt im Großen irreduktibler Faktoren zerlegen.*

Knüpfen wir an die vorhin besprochene Anordnung der analytischen Gebilde $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ an, deren Stellen die Wurzeln von $G(z_1, \ldots, z_n)$ ausmachen, und bezeichnen wir die nach dem

2. Satze dazu gehörigen Primfaktoren $F(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. mit $G_1(z_1, \ldots, z_n)$, $G_2(z_1, \ldots, z_n)$, ...

Sei (a) eine gewöhnliche Stelle von $\mathfrak{G}_1$, welche auf keinem anderen Gebilde $\mathfrak{G}_k$ liegt. Dann läßt sich G in der Nähe von (a) in der Form darstellen:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \Gamma(z_1, \ldots, z_n)^l,$$

wo Γ in (a) irreduktibel ist. Andererseits ist

$$G_1(z_1, \ldots, z_n) = \Omega(z_1, \ldots, z_n)\Gamma(z_1, \ldots, z_n), \qquad \Omega(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Demgemäß ist G in (a) durch G_1^l teilbar, und nun beweist man nach den üblichen Methoden, daß diese Beziehung auch im Großen gilt:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = Q(z_1, \ldots, z_n)\, G_1(z_1, \ldots, z_n)^{l_1},$$

wo $l_1 = l$ ist und Q eine ganze Funktion bedeutet, welche nicht durch G_1 teilbar ist.

Ist noch ein zweites Gebilde $\mathfrak{G}_2$ vorhanden, so sei (b) eine Stelle desselben, welche nicht auf einem weiteren $\mathfrak{G}_k$ liegt. Ähnlich wie vorhin schließt man nun, daß G zunächst im Kleinen in (b) durch $G_2(z_1, \ldots, z_n)^{l_2}$ teilbar ist. Daraus folgt aber ferner, daß $Q(z_1, \ldots, z_n)$ auch im Kleinen, sodann aber noch im Großen diesen Faktor zuläßt.

Durch Wiederholung dieser Schlußweise ergibt sich dann der Beweis des Satzes, falls nur endlich viele Gebilde $\mathfrak{G}_k$ vorhanden sind. Gibt es dagegen deren unendlich viele, so ordne man diese wie beim Beweise des 1. Satzes an, und bilde man die Funktionen:

$$\begin{aligned} p_1 &= G_1^{l_1} \quad \ldots \quad G_{\mu_1}^{l_{\mu_1}}, \\ p_2 &= G_{\mu_1+1}^{l_{\mu_1+1}} \quad \ldots \quad G_{\mu_2}^{l_{\mu_2}}, \\ p_3 &= G_{\mu_2+1}^{l_{\mu_2+1}} \quad \ldots \quad G_{\mu_3}^{l_{\mu_3}}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sollte insbesondere für einen gewissen Wert k des Index kein Gebilde $\mathfrak{G}$ vorhanden sein, so sei $p_k = 1$.

Es handelt sich nun darum, die p_m mit Konvergenzfaktoren zu versehen, um daraus das in Aussicht gestellte unendliche Produkt zu gewinnen. Dies geschieht, wie folgt. Im abgeschlossenen Bereiche Σ_{m-1}, $2 \leqq m$, verhält sich p_m analytisch und verschwindet dort nicht. Demgemäß kann man

$$p_m = e^{\Omega_m}$$

setzen, wobei der Exponent Ω_m sich in Σ_{m-1} analytisch verhält. Sei

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Indem nun Ω_m nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt wird, läßt sich der Rest R_m der Reihe[1]) so bestimmen, daß in Σ_{m-1}

$$| R_m(z_1, \ldots, z_n) | < \varepsilon_m$$

bleibt. Sei

$$\Omega_m = P_m + R_m,$$

wo P_m ein Polynom bedeutet. Setzt man noch

$$q_1 = p_1, \qquad q_m = p_m e^{-P_m}, \qquad 2 \leqq m,$$

so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_{m=1}^{\infty} q_m$$

in jedem Punkte des endlichen Raumes.

Ist ferner T ein beliebiger endlicher Bereich des Raumes der Variabelen $(z_1, \ldots, z_n)$, so konvergiert das genannte Produkt gleichmäßig in T; Bd. I, S. 549. Mithin stellt es eine ganze Funktion $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ vor.

Des weiteren weist der Quotient $\frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{\Phi(z_1, \ldots, z_n)}$ im Endlichen nur hebbare Singularitäten auf, und die entsprechende monogene analytische Funktion ist eine ganze, welche keine Nullstellen mehr besitzt. Demgemäß kann man schreiben:

$$G(z_1, \ldots, z_n) = e^{\mathsf{H}(z_1, \ldots, z_n)}\, \Phi(z_1, \ldots, z_n),$$

wobei H eine ganze Funktion bedeutet.

Indem man nun die Konvergenzfaktoren, sowie den Außenfaktor e^{H}, auf die Funktionen $G_1, G_2, \ldots$ in erlaubter Weise verteilt, wobei dem Faktor G_m ein Faktor e^{γ_m} zukommen möge, erhält man schließlich die Darstellung

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{m=1}^{\infty} \{ G_m e^{\gamma_m} \}^{l_m}.$$

---

1) Die dazu nötige Anzahl von Gliedern hängt zwar von m ab, wird aber im allgemeinen nicht gleich m sein.

Man beweist aber auch ohne Mühe, daß die Faktoren einer jeden anderen derartigen Darstellung bzw. mit den Faktoren des vorstehenden Produkts äquivalent sein müssen, und hiermit ist der Beweis des Satzes fertig.

Es liegt nahe, die Umkehrung dieses Satzes zu vermuten. Hierzu werden wir uns im nächsten Paragraphen wenden.

Erweiterung der vorhergehenden Sätze. Die soeben entwickelten Sätze kann man auf die Funktionen ausdehnen, welche sich in einem beliebigen einfach zusammenhängenden Zylinderbereiche $(S_1, \ldots, S_n)$ analytisch verhalten, gleichviel ob eine analytische Fortsetzung über diesen Bereich hinaus möglich ist oder nicht. Da jeder Bereich S_k auf den Einheitskreis seiner Ebene konform abgebildet werden kann, so genügt es, wenn wir uns auf die Bereiche letzterer Art beschränken.

Vor allem wird man die Definition der Irreduktibilität im Bereiche (S) in ersichtlicher Weise einführen. Verschwindet die vorgelegte Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$ in einem inneren Punkte (a) von (S), so wird es wiederum ein monogenes analytisches Gebilde $\mathfrak{G}$ geben, deren Stellen zum Teil Wurzeln von G liefern. Man kann aber hier nur behaupten, daß ein Stück von $\mathfrak{G}$, welches durch (a) hindurchgeht und von da aus durch nur zu Punkten von (S) führende analytische Fortsetzungen zu bestimmen ist, Stellen liefert, die Wurzeln von G sind. Es ist wohl denkbar, daß auch andere Teile von G in (S) liegen, welche aber erst durch außerhalb (S) zu führende analytische Fortsetzungen zu erzielen sind. Die Stellen eines solchen Teiles von $\mathfrak{G}$ brauchten dann keine Wurzeln von G zu liefern.

Jetzt sieht man leicht, wie die drei vorstehenden Sätze für diesen Fall zu formulieren und zu beweisen sind.

§ 27. Von den Gebilden, welche dem Verschwinden einer ganzen Funktion entsprechen.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die Wurzeln einer irreduktiblen ganzen Funktion die im Endlichen gelegenen Stellen eines monogenen analytischen Gebildes $(n-1)$-ter Stufe im Raume der n Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$ gerade ausmachen. Ein derartiges Gebilde $\mathfrak{G}$ hat fernerhin die folgende Eigenschaft. Sei (a) ein endlicher Häufungspunkt von Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}$. Dann werden alle in der Nähe von (a) gelegenen

Stellen von $\mathfrak{G}$ sich mit den Wurzeln einer endlichen Anzahl von Gleichungen decken:

$$\Gamma_i(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad i=1, \ldots, l,$$

wobei Γ_i im Punkte (a) irreduktibel ist. Dabei hat l in einer nicht-spezialisierten Stelle des Gebildes den Wert 1.

Diese Eigenschaft ist geradezu charakteristisch für derartige Gebilde $\mathfrak{G}$, was durch folgenden Satz zum Ausdruck gebracht werden soll.

1. Satz.[1]) *Sei $\mathfrak{G}$ ein monogenes analytisches Gebilde $(n-1)$-ter Stufe im Raume der n Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$, welches die vorbezeichnete Eigenschaft aufweist. Alsdann gibt es eine ganze irreduktible Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$, deren Wurzeln die endlichen Stellen von $\mathfrak{G}$ gerade ausmachen.*

Der Beweis erfolgt sofort aus dem Theorem von § 25, indem man in jedem Punkte (a) von $\mathfrak{G}$

$$u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{k=1}^{l} \Gamma_k(z_1, \ldots, z_n),$$

dagegen in jedem nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkte (a) $u_{(a)}(z) = 1$ setzt.[2])

Wir können jetzt den am Ausgange des § 26 in Aussicht genommenen Satz aussprechen und beweisen.

2. Satz. *Seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ eine beliebige Folge analytischer Gebilde der am Eingange dieses Paragraphen bezeichneten Art, und sei jedem davon eine willkürliche Multiplizität $l_1, l_2, \ldots$ bzw. zugeordnet. Dann gibt es eine ganze Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$, welche in den Punkten dieser Gebilde, und zwar jedesmal mit der vorgeschriebenen Multiplizität, verschwindet und sonst keine Wurzeln hat.*

---

1) Hahn, *Monatshefte* 16 (1905), S. 29. Man vgl. aber auch Gronwall, *Dissertation*, wo der Satz im wesentlichen schon zu finden ist. Im übrigen sind verschiedene der Hahnschen Sätze infolge der von Gronwall herrührenden Berichtigung, § 25, Ende, enger zu fassen.

2) Es könnte den Anschein haben, als wenn wir hier bloß einen Teil der Entwicklungen von § 26 wiederholt hätten. Was den *Beweis* anbetrifft, trifft dies in der Tat zu. Die *Voraussetzungen* sind aber hier allgemeinerer Art, denn in jenem Paragraphen entstand ja $\mathfrak{G}$ aus dem Verschwinden einer bereits vorhandenen ganzen Funktion, während hier $\mathfrak{G}$ ganz unabhängig von der Existenz einer solchen Funktion definiert wird.

Ist $G(z_1, \ldots, z_n)$ *eine besondere derartige Funktion, so ist die allgemeinste Funktion*

$$e^{H(z_1, \ldots, z_n)} G(z_1, \ldots, z_n),$$

wo $H(z_1, \ldots, z_n)$ *eine ganze Funktion bedeutet.*

§ 28. Von der Darstellung meromorpher Funktionen als Quotienten.

Wir wollen jetzt einen Satz kennen lernen, welcher zuerst von Poincaré[1]) für den ganzen endlichen Raum ausgesprochen und bewiesen wurde. Sein Beweis beruht indessen auf harmonischen Funktionen im mehrdimensionalen Raume, deren Theorie auch heute noch nicht systematisch ausgebildet ist.

1. Satz. *Sei* $(S) = (S_1, \ldots, S_n)$ *ein beliebiger einfach zusammenhängender*[2]) *Zylinderbereich, und sei* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *eine Funktion, welche sich in demselben meromorph verhält. Dann gibt es zwei in* (S) *analytische Funktionen* $G(z_1, \ldots, z_n)$ *und* $H(z_1, \ldots, z_n)$, *derart, daß*

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{H(z_1, \ldots, z_n)}$$

ist, und zwar sind G *und* H *in einer beliebigen gemeinsamen Nullstelle dieser Funktionen teilerfremd gegeneinander.*

Der Einfachheit der Darstellung halber beschränken wir uns auf den Fall, daß (S) aus dem ganzen endlichen Raume besteht. Sei (a) ein singulärer Punkt von F. Dann läßt sich F in der Nähe von (a), wie folgt, darstellen:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\mathsf{\Gamma}_1^{\alpha_1} \ldots \mathsf{\Gamma}_p^{\alpha_p}}{\mathsf{H}_1^{\gamma_1} \ldots \mathsf{H}_q^{\gamma_q}},$$

wobei $\mathsf{\Gamma}_i(z_1, \ldots, z_n)$, $\mathsf{H}_j(z_1, \ldots, z_n)$ lauter verschiedene im Punkte (a) irreduktible Funktionen bedeuten. Ist aber (a) ein Pol von F, so wird der Zähler durch 1 ersetzt.

1) *Acta Mathematica* 2 (1883), S. 97.

2) Genauer gesagt soll jeder Bereich S_k einfach zusammenhängen und in seiner erweiterten Ebene berandet sein; m. a. W. soll er im Sinne von Bd. I, S. 788 zur Klasse a) oder b) gehören.

Im übrigen darf einer der Bereiche S_k ein mehrfach zusammenhängender Zylinderbereich sein.

Wir ordnen nun jedem singulären Punkte (a) von F die Funktion

$$u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = \mathsf{H}_1^{\beta_1} \ldots \mathsf{H}_q^{\beta_q}$$

zu. Dagegen soll in jedem anderen Punkte (a) des Raumes $u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = 1$ sein. Die also definierten Funktionen $u_{(a)}(z)$ genügen den Voraussetzungen des Theorems von § 25, und darum gibt es eine ganze Funktion $H(z_1, \ldots, z_n)$, welche in jedem endlichen Punkte (a) in bezug auf Division mit $u_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ äquivalent ist. Demgemäß wird durch das Produkt

$$H(z_1, \ldots, z_n) F(z_1, \ldots, z_n) = G(z_1, \ldots, z_n)$$

nach Ergänzung in den hebbaren Singularitäten eine ganze Funktion definiert, und zwar lassen G und H in keinem gemeinsamen Nullpunkte einen gemeinsamen Teiler zu. Hiermit ist der Beweis erbracht.

Der Satz gilt aber im allgemeinen nicht für den Fall, daß (S) mehrfach zusammenhängt; vgl. § 25, Ende.

Dem soeben bewiesenen Satz entspricht ein Existenztheorem, welches dem Satze von § 24 analog ist.

2. Satz.[1]) *Jedem Punkte (a) eines einfach zusammenhängenden Zylinderbereiches $(S) = (S_1, \ldots, S_n)$ werde eine Funktion $\varphi_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ nebst einer Umgebung $T_{(a)}$ zugeordnet, derart, daß sich $\varphi_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ in $T_{(a)}$ meromorph verhält und nicht identisch verschwindet. Ist ferner (a') ein Punkt von $T_{(a)}$, so soll $\varphi_{(a')}(z_1, \ldots, z_n)$ in (a') mit $\varphi_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ äquivalent in bezug auf Division sein. Alsdann gibt es eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche sich in (S) meromorph verhält und in jedem Punkte (a) von (S) mit der zugehörigen Funktion $\varphi_{(a)}(z_1, \ldots, z_n)$ äquivalent in bezug auf Division ist.*

Der Beweis wird mit denselben Hilfsmitteln wie beim vorhergehenden Satze geliefert, indem man die Existenz zweier in (S) analytischen Funktionen nachweist, deren Quotient

$$\frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{H(z_1, \ldots, z_n)}$$

in jedem Punkte (a) von (S) mit $\varphi_{(a)}(z)$ äquivalent in bezug auf Division ist.

---

1) Cousin a. a. O., S. 56, wobei indessen die Forderung des einfachen Zusammenhanges noch hinzugefügt werden muß.

§ 29. Rationale Funktionen. Der Weierstraßsche Satz.

Es ist bekannt, welch wesentliche Rolle die Sätze betreffend rationale Funktionen einer Veränderlichen in der Analysis spielen. Insbesondere nimmt der Satz, daß eine Funktion $f(z)$, welche in der erweiterten Ebene nur außerwesentliche singuläre Stellen aufweist, rational sein muß, eine Hauptstellung ein; vgl. Bd. I, S. 347. Weierstraß[1]) hat denselben Satz für eine Funktion mehrerer Veränderlichen, im Raume der Analysis betrachtet, ausgesprochen, und Hurwitz[2]) hat ihn bewiesen.

Satz. *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte des Raumes der Analysis meromorph, so ist F eine rationale Funktion.*

Dieser Satz gestattet Verallgemeinerungen nach zwei verschiedenen Richtungen hin. Einerseits braucht man das meromorphe Verhalten nicht für den ganzen Raum der Analysis, sondern nur für geeignet gewählte Mannigfaltigkeiten niederer Dimension vorauszusetzen. Andererseits gilt er für andere durch einen unendlich fernen Bereich geschlossene Räume, wie z. B. für den projektiven Raum — ja, er gilt sogar für jeden Raum, der nach dieser Art geschlossen wird, § 32.

Der volle Inhalt der Hurwitzschen Schlußweise, welche wir jetzt mitteilen wollen, findet im Weierstraßschen Satze noch keinen erschöpfenden Ausdruck. Vielmehr kann man mit denselben Hilfsmitteln einen allgemeineren Satz begründen, welchen wir nun an die Spitze stellen wollen.

Sei $\mathfrak{A}$ dasjenige Gebilde des analytischen Raumes von n komplexen Veränderlichen, dessen Punkte mindestens einer der folgenden n Zeilen angehören:

$$\mathfrak{A}:\quad \begin{cases} (b_1, z_2, z_3, \ldots, z_n), & |z_i| \leqq \infty, \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \\ (z_1, b_2, z_3, \ldots, z_n), & |z_i| \leqq \infty, \qquad i = 1, 3, \ldots, n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (z_1, z_2, z_3, \ldots, b_n), & |z_i| \leqq \infty, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Dabei ist $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ irgendein fester Punkt des genannten Raumes.

1) *Journ. für Math.* 86 (1880), S. 5 = *Werke* 2, S. 129.
2) Ibid. 95 (1883), S. 201.

Der erweiterte Satz. *In jedem Punkte von $\mathfrak{A}$ soll sich die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ meromorph verhalten. Dann ist F eine rationale Funktion von $z_1, z_2, \ldots, z_n$.*

Da $\mathfrak{A}$ in jenem Raume abgeschlossen ist, so erkennt man zunächst, daß es einen $\mathfrak{A}$ umfassenden $2n$-fach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{T}$ dieses Raumes gibt, in welchem F das nämliche Verhalten aufweist, und zwar läßt sich $\mathfrak{T}$ als der Inbegriff der Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ definieren, deren Koordinaten den in mindestens einer der folgenden Zeilen enthaltenen Relationen genügen:

$$\mathfrak{T}: \quad \begin{cases} |z_1 - b_1| < h, & |z_i| \leqq \infty, \qquad i=2,3,\ldots,n; \\ |z_2 - b_2| < h, & |z_i| \leqq \infty, \qquad i=1,3,\ldots,n; \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ |z_n - b_n| < h, & |z_i| \leqq \infty, \qquad i=1,2,\ldots,n-1, \end{cases}$$

wobei h eine geeignete positive Konstante bedeutet und übrigens, falls $b_k = \infty$ ist, $z_k - b_k$ durch $\frac{1}{z_k}$ zu ersetzen ist.

Hieraus erkennt man, daß der Punkt (b) nötigenfalls noch durch einen Punkt (b') ersetzt werden kann, in welchem sich $F(z_1, \ldots, z_n)$ analytisch verhält. Im übrigen möge der also abgeänderte Punkt (b) vermöge einer linearen Transformation

$$z_k' = \frac{\alpha_k z_k + \beta_k}{\gamma_k z_k + \delta_k}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{vmatrix} \neq 0, \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

in den Anfang (0) verlegt werden. Von jetzt ab bestehe also $\mathfrak{A}$ aus den Punkten der Koordinatenhyperebenen $z_k = 0$:

$$\mathfrak{A}: \quad \{(z_1, \ldots, z_{k-1}, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n)\}, \qquad |z_i| \leqq \infty,$$
$$i=1,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,n; \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

und dementsprechend wird $\mathfrak{T}$ von den Punkten einer bestimmten Umgebung derselben gebildet:

$$\mathfrak{T}: \quad |z_k| < h, \qquad |z_i| \leqq \infty, \qquad i \neq k; \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Dabei möge h noch so gewählt werden, daß F im Bereiche $|z_i| < h$, $i=1,2,\ldots,n$, analytisch ist.

Der Beweis wird vermöge der Methode der vollständigen Induktion geführt. Die nachstehende Schlußweise leistet aber zweierlei: a) Setzt man $n=2$, so liefert dieselbe den vollkommenen Beweis des erweiterten Satzes für diesen Fall. b) Nimmt man

an, der erweiterte Satz gelte für $n = 2, 3, \ldots, n-1$, so ergibt sie den Beweis, daß er auch für $n = n$ besteht. Im übrigen ist die nachstehende Untersuchung nur dann nötig, wenn $F(z_1, \ldots, z_n)$ von allen n Argumenten wirklich abhängt, und diese Voraussetzung wollen wir denn noch hinzufügen.

Hilfssatz. *Nimmt man b_k der Bedingung $|b_k| < h$ gemäß willkürlich an, so ist $F(z_1, \ldots, z_{k-1}, b_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion von $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$.*

Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall zu führen, daß $k = n$ ist. Sei $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ eine beliebige Stelle des abgeschlossenen $(z_1, \ldots, z_{n-1})$-Raumes. Dann liegt der Punkt A: $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n)$ nach Voraussetzung im Bereiche $\mathfrak{T}$, und daher läßt F in der Nähe dieses Punktes die Darstellung zu:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{H(z_1, \ldots, z_n)}{G(z_1, \ldots, z_n)},$$

wo G, H sich beide dort analytisch verhalten. Hieraus folgt weiter:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{C_0 + C_1(z_n - b_n) + \cdots}{C_0' + C_1'(z_n - b_n) + \cdots}, \tag{1}$$

wobei C_k, C_k' im Punkte $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ analytische Funktionen von $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ sind und C_0, C_0' nicht beide identisch verschwinden.

Ich behaupte nun: die Funktion C_0' verschwindet nicht identisch. Im anderen Falle würden nämlich zunächst alle in einer bestimmten Umgebung des Punktes A gelegenen Stellen der Mannigfaltigkeit $z_n = b_n$ zu den singulären Punkten der Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ gehören. Sei τ die Menge der Punkte dieser Mannigfaltigkeit, welche dieselbe Eigenschaft wie A besitzen. Dann besteht τ aus einem oder mehreren Kontinuen, kann aber die ganze Mannigfaltigkeit $z_n = b_n$ nicht ausfüllen, da F ja im Punkte $(0, \ldots, 0, b_n)$ nach Voraussetzung analytisch ist. Sei A': $(a_1', \ldots, a_{n-1}', b_n)$ ein (endlicher oder unendlicher) Randpunkt von τ und man setze die Darstellung (1) für den Punkt A' an. Bezeichnet man mit $\overline{C}_0'$ das erste Glied des neuen Nenners, so führt sowohl die Annahme $\overline{C}_0' \equiv 0$ als auch diejenige: $\overline{C}_0' \not\equiv 0$ direkt zu einem Widerspruch. Im ersten Falle müßte nämlich die volle Umgebung der Stelle $(a_1', \ldots, a_{n-1}')$ zu singulären Stellen $(z_1, \ldots, z_{n-1}, b_n)$ der Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ führen, und das verträgt sich eben nicht mit

der Annahme, daß A' ein Randpunkt von τ sei. Im zweiten Falle ergeben sich dagegen in der Nähe von A' Stellen $(z'_1, \ldots, z'_{n-1}, b_n)$ von τ derart, daß $\bar{C}'_0(z'_1, \ldots, z'_{n-1}) \neq 0$ ist, und dort wäre F analytisch.

Indem man nun in (1) $z_n = b_n$ setzt, erkennt man, daß die Funktion $F(z_1, \ldots, z_{n-1}, b_n)$ in der Nähe der willkürlichen Stelle $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ durch den Quotienten zweier dort analytischen Funktionen $\frac{C_0}{C'_0}$, $(C'_0 \not\equiv 0)$ dargestellt wird. Allein der Weierstraßsche Satz gilt nach Voraussetzung für Funktionen von $n-1$ Argumenten, und hiermit ist der Beweis des Hilfssatzes geliefert.

Zum Beweise des Hauptsatzes wollen wir nun zwei Darstellungen für die Funktion $F(z_1, \ldots, z_{n-1}, b_n)$ in einem beschränkten Bereiche miteinander vergleichen. Sei b_n ein Punkt des Kreises $|z_n| < h' < h$. Dann ist

$$(2) \qquad F(z_1, \ldots, z_{n-1}, b_n) = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \cdots + B_r z_1^r}{B'_0 + B'_1 z_1 + \cdots + B'_r z_1^r},$$

wobei B_i, B'_j Polynome in $(z_2, \ldots, z_{n-1})$ sind und B_r, B'_r nicht beide identisch verschwinden. Da die Punkte des genannten Kreises nicht abzählbar sind, so muß es ja unendlich viele Punkte b_n desselben geben, wozu derselbe Wert von r gehört. Sei b'_n eine Häufungsstelle solcher Punkte. Dann ist $|b'_n| \leqq h'$. Wir beschränken uns nun in der Folge auf solche Werte von b_n. Dabei hat r einen konstanten Wert, und die Punkte b_n häufen sich in b'_n.

Andererseits werde die Funktion F in folgende im Bereiche $|z_i| < h$, $i=1,2,\ldots,n$, konvergierende Reihe entwickelt:

$$(3) \qquad F(z_1, \ldots, z_n) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \cdots.$$

Dabei ist A_k eine im Bereiche $|z_i| < h$, $i=2,\ldots,n$, analytische Funktion von $z_2, \ldots, z_n$. Setzen wir noch $A_k(z_2, \ldots, z_{n-1}, b_n) = \bar{A}_k$, so kommt:

$$(4) \qquad F(z_1, \ldots, z_{n-1}, b_n) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_1^2 + \cdots.$$

Aus (2) und (4) ergibt sich, daß

$$(\bar{A}_0 + \bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_1^2 + \cdots)(B'_0 + B'_1 z_1 + \cdots + B'_r z_1^r)$$
$$= B_0 + B_1 z_1 + \cdots + B_r z_1^r.$$

Daraus geht nun hervor, daß alle Determinanten $(r+1)$-ter Ordnung aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \ldots & \bar{A}_{r+1} \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_3 & \ldots & \bar{A}_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

verschwinden[1]), wobei z_i der Bedingung gemäß: $|z_i| < h$, $i=2, \ldots, n-1$, und b_n aus der bewußten Menge willkürlich gewählt werden. Mithin verschwinden auch die entsprechenden Determinanten aus der Matrix (Kap. 1, § 14, 6. Satz):

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{r+1} \\ A_2 & A_3 & \ldots & A_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix (in bezug auf identisches Verschwinden) ist aber mindestens gleich 1, da F sonst von weniger als n Argumenten abhängen würde.

Hieraus schließt man weiter auf die Existenz von $r+1$ im Bereiche $|z_i| < h$, $i=2, \ldots, n$, analytischen, nicht sämtlich verschwindenden Funktionen

$$f_k(z_1, \ldots, z_n), \qquad k=0,1,\ldots,r,$$

welche den Gleichungen genügen:

$$\begin{gathered} f_r A_1 + f_{r-1} A_2 + \cdots + f_0 A_{r+1} = 0, \\ f_r A_2 + f_{r-1} A_3 + \cdots + f_0 A_{r+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Bildet man nun das Produkt

$$(5) \qquad \begin{aligned} F(z_1, \ldots, z_n)\{f_0 + f_1 z_1 + \cdots + f_r z_1^r\} \\ = \{A_0 + A_1 z_1 + \cdots\}\{f_0 + f_1 z_1 + \cdots + f_r z_1^r\} \\ = \varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \cdots, \end{aligned}$$

so erkennt man, daß letztere Reihe mit dem Gliede r-ten Grades schon abbricht, und darum ist

$$(6) \qquad F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \cdots + \varphi_r z_1^r}{f_0 + f_1 z_1 + \cdots + f_r z_1^r},$$

wobei auch jede Funktion $\varphi_k(z_2, \ldots, z_n)$ sich im Bereiche $|z_i| < h$, $i=2,\ldots,n$, analytisch verhält.

1) Die Kenntnis der Theorie der linearen Abhängigkeit wird hier, wie auch an so manchen anderen Stellen dieses Werkes, vorausgesetzt. Vgl. Bôcher, *Algebra*, Kap. 3, 4.

Nunmehr sind alle Hilfsmittel vorhanden, um die endgültigen Schlüsse zu ziehen. In der Formel (6) erteilen wir der Variabelen z_1 $2r+1$ getrennte Werte $c_1, \ldots, c_{2r+1}$, wobei stets $|c_i| < h$. Nach dem Hilfssatze wird dann $F(c_i, z_2, \ldots, z_n)$ jedesmal eine rationale Funktion von $z_2, \ldots, z_n$. Setzen wir

$$F(c_i, z_2, \ldots, z_n) = \frac{G_i(z_2, \ldots, z_n)}{\Gamma_i(z_2, \ldots, z_n)}, \qquad i = 1, \ldots, 2r+1, \tag{7}$$

wobei G_i, Γ_i teilerfremde Polynome sind. Dann ergibt (6), indem wir unter F die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ verstehen, folgende $2r+2$ homogene lineare Gleichungen als notwendige Bedingungen für $f_0, \ldots, f_r, \varphi_0, \ldots, \varphi_r$:

$$\begin{aligned}
&F f_0 + F z_1 f_1 + \cdots + F z_1^r f_r - \varphi_0 - z_1 \varphi_1 - \cdots - z_1^r \varphi_r = 0,\\
&G_1 f_0 + G_1 c_1 f_1 + \cdots + G_1 c_1^r f_r - \Gamma_1 \varphi_0 - \Gamma_1 c_1 \varphi_1 - \cdots - \Gamma_1 c_1^r \varphi_r = 0,\\
&G_2 f_0 + G_2 c_2 f_1 + \cdots + G_2 c_2^r f_r - \Gamma_2 \varphi_0 - \Gamma_2 c_2 \varphi_1 - \cdots - \Gamma_2 c_2^r \varphi_r = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_{2r+1} f_0 + G_{2r+1} c_{2r+1} f_1 + \cdots + G_{2r+1} c_{2r+1}^r f_r - \Gamma_{2r+1} \varphi_0\\
&\qquad - \Gamma_{2r+1} c_{2r+1} \varphi_1 - \cdots - \Gamma_{2r+1} c_{2r+1}^r \varphi_r = 0.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichungen bekanntlich eine von der identischen verschiedene Lösung zulassen, so muß ihre Determinante verschwinden. Letztere werde nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. So kommt eine lineare Gleichung für F zustande, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$ sind, und hiermit ist denn das Resultat erreicht, in welchem das ganze Raisonnement gipfelt, sofern nicht etwa der Koeffizient von F dabei identisch verschwindet.

Letzteres kann nur dann eintreten, wenn der Rang[1]) ϱ der aus den letzten $2r+1$ Zeilen der Determinante bestehenden Matrix $< 2r+1$ ist. Andererseits ist ϱ mindestens gleich $r+1$, da die Vandermondesche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^r \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \ldots & c_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_{r+1} & c_{r+1}^2 & \ldots & c_{r+1}^r \end{vmatrix}$$

1) d. h. der Rang in bezug auf *identisches* Verschwinden der dabei beteiligten Determinanten.

sicherlich nicht verschwindet und außerdem kein Γ_i identisch verschwindet.

Sollte nun $\varrho < 2r + 1$ sein, so betrachten wir die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} G & z_1 G \ldots z_1^r G & \Gamma & z_1 \Gamma \ldots z_1^r \Gamma \\ G_1 & c_1 G_1 \ldots c_1^r G_1 & \Gamma_1 & c_1 \Gamma_1 \ldots c_1^r \Gamma_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ G_\varrho & c_\varrho G_\varrho \ldots c_\varrho^r G_\varrho & \Gamma_\varrho & c_\varrho \Gamma_\varrho \ldots c_\varrho^r \Gamma_\varrho \end{matrix} \right\|,$$

wobei die Matrix der letzten ϱ Zeilen vom Range ϱ sei und z_1 einen beliebigen Punkt des Kreises $|z_1| < h$ bedeutet. Im übrigen ist für diesen besonderen Wert von z_1

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G(z_2, \ldots, z_n)}{\Gamma(z_2, \ldots, z_n)}$$

gesetzt worden. Nach Voraussetzung verschwindet jede $(\varrho + 1)$-reihige Determinante aus der vorstehenden Matrix. Insbesondere wird also

$$\left| \begin{matrix} z_1^{i_1} G \ldots z_1^{i_k} G & z_1^{j_1} \Gamma \ldots z_1^{j_l} \Gamma \\ c_1^{i_1} G_1 \ldots c_1^{i_k} G_1 & c_1^{j_1} \Gamma_1 \ldots c_1^{j_l} \Gamma_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_\varrho^{i_1} G_\varrho \ldots c_\varrho^{i_k} G_\varrho & c_\varrho^{j_1} \Gamma_\varrho \ldots c_\varrho^{j_l} \Gamma_\varrho \end{matrix} \right| = 0,$$

wobei die Matrix der letzten ϱ Zeilen vom Range ϱ ist und außerdem die $i_\varkappa$ unter sich, sowie die j_λ unter sich, voneinander getrennt sind. Dividiert man beiderseits durch Γ, so geht die erste Zeile in folgende über:

$$z_1^{i_1} F \ldots z_1^{i_k} F \qquad z_1^{j_1} \ldots z_1^{j_l}.$$

Die also abgeänderte Determinante werde nun nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. Dadurch ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$AF + B = 0,$$

$$A = A_0 + A_1 z_1 + \cdots + A_r z_1^r,$$

$$B = B_0 + B_1 z_1 + \cdots + B_r z_1^r,$$

wobei unter den A_i, B_j sämtliche Unterdeterminanten jener Elemente vorkommen. Mithin verschwinden A, B sicher nicht identisch, und der Beweis ist geliefert.

Im übrigen läßt der erweiterte Satz auch folgende Formulierung zu.

Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ meromorph, entweder

a) *in jedem Punkte des Raumes der Funktionentheorie, welcher in einer der n Koordinatenhyperebenen*

$$z_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

liegt; oder

b) *in jedem Punkte des unendlich fernen Bereiches der Funktionentheorie,*

so ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion aller n-Variabelen $z_1, \ldots, z_n$.

Aufgabe. Man zeige, daß eine Funktion, welche im Raume der Analysis nur Pole besitzt, eine rationale Funktion eines einzigen Arguments ist.

§ 30. Fortsetzung. Verallgemeinerungen erster Art.

Im Anschlusse an das Hurwitzsche Beweisverfahren, § 29, ergibt sich eine Reihe von Erweiterungen des Weierstraßschen Satzes.

1. Satz. *Sei $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine im Anfange analytische Funktion, welche für jeden Punkt $(a_2, \ldots, a_n)$ einer bestimmten Umgebung T der Stelle $(z_2, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$ eine rationale Funktion des ersten Arguments ist:*

$$F(z_1, a_2, \ldots, a_n) = R(z_1).$$

Alsdann ist

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \cdots + \varphi_r z_1^r}{f_0 + f_1 z_1 + \cdots + f_r z_1^r},$$

wo $\varphi_i(z_2, \ldots, z_n)$ und $f_i(z_2, \ldots, z_n)$ analytisch im Anfange sind und f_0 dort nicht verschwindet.

Den Beweis führt man vermöge des Gedankenganges, wodurch Formel (6), § 29, begründet wurde. Nach Voraussetzung ist

$$(1) \qquad F(z_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \cdots + B_r z_1^r}{B_0' + B_1' z_1 + \cdots + B_r' z_1^r},$$

wobei $B_0' \neq 0$ und $r \geqq 0$ ist. Sei h so gewählt, daß F sich im Bereiche

$$|z_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält und übrigens der Bereich

$$T_1: \qquad |z_k| < h, \qquad k = 2, \ldots, n,$$

in T liegt. Indem wir (a) im Bereiche

$$T_1': \qquad |z_k| \leqq h' < h, \qquad k=2,\ldots,n,$$

beliebig annehmen und die Gleichung (1) dafür bilden, verstehen wir unter M_ϱ die Menge solcher Punkte (a), wofür $r \leqq \varrho$ ist.[1]) Da nun

$$\lim_{\varrho=\infty} M_\varrho = T_1'$$

ist, so muß es nach dem Hilfssatze von § 18 schließlich einen Wert $\varrho = \varrho'$ geben, wofür die Punkte von $M_{\varrho'}$ in einem in T_1' enthaltenen $2n$-dimensionalen Kontinuum überall dicht sind.

Von hier ab verläuft der Beweis gerade so, wie in § 29. Einerseits schreiben wir nämlich die Formel (1) für einen willkürlichen Punkt (a) der Menge $M_{\varrho'}$ hin, wobei aber jetzt $r = \varrho'$ gesetzt werde, gleichviel ob B_r, B_r' beide verschwinden. Andererseits setzt man die Entwicklung an:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \cdots,$$

und versteht unter $\bar{A}_k$ den Wert von A_k im genannten Punkte (a):

$$F(z_1, a_2, \ldots, a_n) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_1^2 + \cdots.$$

Indem man linkerseits die Funktion F durch ihren Wert aus (1) ersetzt, schließt man zunächst, daß alle Determinanten $(r+1)$-ter Ordnung aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \ldots & \bar{A}_{r+1} \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_3 & \ldots & \bar{A}_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

verschwinden müssen. Mithin verschwinden auch die entsprechenden Determinanten, wenn $\bar{A}_k$ durch A_k ersetzt wird, woraus sich dann der Beweis des Satzes ergibt.

2. Satz.[2]) *Ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Bereiche $|z_k| < h$, $k=1,\ldots,n$, analytisch und ist $F(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $|a_i| < h$, eine rationale Funktion von z_k allein, $k=1,\ldots,n$, so ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion von $z_1, \ldots, z_n$.*

---

1) Der Bestimmtheit halber kann man ja noch verlangen, daß B_r, B_r' nicht beide verschwinden sollen. Doch ist diese Annahme zum nächsten Schlusse nicht nötig und darf durch irgendeine andere ersetzt werden, wodurch nur dem Punkte (a) ein brauchbarer Wert von r zugewiesen wird.

2) *Madison Colloquium*, S. 143, 145.

Vor allem ergibt sich die Darstellung (6), § 29, aus dem vorstehenden 1. Satze. Im Falle $n = 2$ gelangt man von hier aus direkt zum Beweise, indem man die am Ende jenes Paragraphen benützte Schlußweise anwendet.

Wir nehmen nun an, der Satz sei richtig für $2, \ldots, n-1$ Argumente und beweisen ihn dann für n Argumente. Erteilt man der Variabelen z_1 $2r+1$ getrennte Werte $c_1, \ldots, c_{2r+1}$, $|c_i| < h$, so wird $F(c_i, z_2, \ldots, z_n)$ eine Funktion von $n-1$ Argumenten sein, welche den Bedingungen des vorliegenden Satzes genügt und daher nach Voraussetzung diesem Satze gehorcht.

Hiermit hat sich nun ergeben, daß $F(c_i, z_2, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion von $z_2, \ldots, z_n$ ist, und die alte Schlußweise von § 29 setzt jetzt wieder ein.

3. Satz. *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte der Koordinatenachsen unter Zugrundelegung des Raumes der Funktionentheorie meromorph, so ist F eine rationale Funktion der n Variabelen $z_1, \ldots, z_n$.*

Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der zu den Koordinatenachsen gehörigen Punkte,

$$\mathfrak{M}: \quad \begin{cases} (z_1, 0, \ldots, 0), & |z_1| \leqq \infty; \\ (0, z_2, \ldots, 0), & |z_2| \leqq \infty; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (0, 0, \ldots, z_n), & |z_n| \leqq \infty. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, so kann man die Menge in einem $2n$-dimensionalen Bereiche $\mathfrak{T}$ einbetten, worin sich F meromorph verhält. Insbesondere darf $\mathfrak{T}$, wie folgt, gewählt werden; die Punkte von $\mathfrak{T}$ sind alle diejenigen, deren Koordinaten mindestens einer der nachstehenden Relationen genügen.

$$\mathfrak{T}: \quad \begin{array}{lll} |z_1| \leqq \infty, & |z_k| < h, & k = 2, 3, \ldots, n, \\ |z_2| \leqq \infty, & |z_k| < h, & k = 1, 3, \ldots, n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |z_n| \leqq \infty, & |z_k| < h, & k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array}$$

Im übrigen kann man unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, daß F sich im Anfange analytisch verhält, und h dann noch so beschränken, daß F sich im Bereiche

$$|z_k| < h, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

analytisch verhält.

Behufs des Beweises zeigen wir im Anschluß an das in § 29 verwendete Verfahren, daß die vorgelegte Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ den Bedingungen des 2. Satzes genügt. Sei b_1 eine beliebige Zahl, und sei $|a_k| < h$, $k=2,\ldots,n$. Dann verhält sich F nach Voraussetzung meromorph im Punkte A: $(b_1, a_2, \ldots, a_n)$, und darum ist

$$(2) \qquad F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{H(z_1, \ldots, z_n)},$$

wobei G und H sich beide im Punkte A analytisch verhalten und außerdem, falls beide dort verschwinden, relativ teilerfremd sind. Daraus ergibt sich, daß

$$(3) \qquad F = \frac{C_0 + \mathfrak{P}_1(z_2 - a_2, \ldots, z_n - a_n)}{C_0' + \mathfrak{P}_2(z_2 - a_2, \ldots, z_n - a_n)},$$

wobei $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ konvergente Potenzreihen bedeuten, deren Koeffizienten, sowie C_0, C_0', in einer festen Umgebung des Punktes $z_1 = b_1$ analytisch von z_1 abhängen und welche beide im Punkte (a) verschwinden.

Jetzt behaupte ich: die Funktion C_0' kann nicht identisch verschwinden. Gesetzt, dem wäre nicht so, also $C_0' \equiv 0$. Dann müßte zunächst jeder Punkt $(z_1, a_2, \ldots, a_n)$, wobei z_1 ein Punkt eines Kreises τ mit dem Mittelpunkte b_1 ist, eine singuläre Stelle von F sein. Nun lasse man τ wachsen. Dieser Kreis kann nie den Punkt $z_1 = 0$ im Innern enthalten, denn im Punkte $(0, a_2, \ldots, a_n)$ ist ja F analytisch. Demgemäß muß es einen größten Kreis $\bar{\tau}$ geben. Sei $\bar{b}_1$ ein Randpunkt desselben, und man setze die entsprechende Gleichung (3) für den Punkt $(\bar{b}_1, a_2, \ldots, a_n)$ an. Dann muß auch $\bar{C}_0'$ identisch verschwinden. Da aber $\bar{b}_1$ ein beliebiger Punkt des Kreisrandes war, so verträgt sich dieses Ergebnis nicht damit, daß $\bar{\tau}$ der größte Kreis war.

Hiermit ist nun dargetan, daß $C_0' \not\equiv 0$ ist. Setzt man also $z_k = a_k$, $k=2,\ldots,n$, in (3), so ergibt sich, daß $F(z_1, a_2, \ldots, a_n)$ sich im Punkte $z_1 = b_1$ meromorph verhält. Dieser Punkt ist aber beliebig und darf sogar der Punkt $z_1 = \infty$ sein. Mithin ist $F(z_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine rationale Funktion von z_1, und hiermit haben wir Anschluß an den 2. Satz erreicht.

Bei der Formulierung des Satzes dürfen offenbar an Stelle von $\mathfrak{M}$ n beliebige Geraden treten, welche nur bzw. den n Koordinatenachsen parallel verlaufen. Auch dürfen einige oder sogar alle dieser Geraden durch Mannigfaltigkeiten ersetzt werden,

welche im Unendlichen liegen. Im besonderen kann man den folgenden Satz aussprechen.

Andere Formulierung. *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ meromorph in jedem Punkte desjenigen Teiles des unendlich fernen Bereichs des Raumes der Funktionentheorie, welcher $n-1$ Nordpolen nebst einem willkürlichen Punkte z_k der k-ten Kugel, $k=1,\ldots,n$, entspricht, so ist F eine rationale Funktion aller n Variabelen $z_1, \ldots, z_n$.*

Der 2. Satz läßt noch eine Erweiterung zu, indem die erste Hypothese sich als eine Folge der zweiten erweist. Dieser Satz wird nun, wie folgt, formuliert.

4. Satz.[1]) *Ist eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ so beschaffen, daß $F(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $k=1,\ldots,n$, eine rationale Funktion von z_k allein ist, wobei $(a_1, \ldots, a_n)$ einen beliebigen Punkt der Umgebung $|z_i| < \varrho$, $i=1,\ldots,n$, des Anfangs bedeutet, so ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion von $z_1, \ldots, z_n$.*

Das Beweisverfahren wird schon klar, wenn wir uns auf den Fall $n=2$ beschränken. Dabei werde noch $z_1 = z$, $z_2 = w$ gesetzt.

Nach Voraussetzung ist $F(a, w)$, $|a| < \varrho$, eine rationale Funktion von w allein. Sei r_a die kleinste Entfernung eines im Endlichen gelegenen, von $w = 0$ verschiedenen Poles dieser Funktion vom Anfange $w = 0$, falls ein solcher Pol vorhanden ist; sonst sei $r_a = 2\varrho$.

Jedem Punkte des Kreises $|z| < \varrho$ ordnen wir nun zwei natürliche Zahlen, i und j, wie folgt, zu. Ist erstens $r_z > \varrho'$, wo ϱ' positiv und kleiner als ϱ gewählt ist, so wird dem Punkte z die Zahl $i = 1$ zugewiesen. Sonst wird i durch die Relation

$$\frac{\varrho'}{i} < r_z \leqq \frac{\varrho'}{i-1}$$

bestimmt.

Zweitens wird die Funktion $F(a, w)$ im abgeschlossenen Kreisringe

K: $$\frac{\varrho'}{i+1} \leqq |w| \leqq \frac{\varrho'}{i}$$

1) Die hiermit erhaltene Verallgemeinerung des 2. Satzes nebst Beweis verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von E. E. Levi unter dem Datum vom 15. Juli 1913; vgl. auch das *Madison Colloquium*, S. 145.

betrachtet, wobei i zum Punkte a gehört. Der absolute Betrag derselben hat dort ein Maximum M. Und nun wird j so bestimmt, daß

$$j-1 \leqq M < j$$

ist. Mit andern Worten soll in jedem Punkte von K

$$|F(a, w)| < j,$$

in mindestens einem Punkte von K dagegen

$$j-1 \leqq |F(a, w)|$$

sein. Die hiermit erhaltenen Zahlenpaare (i, j) bilden eine abzählbare[1]) Menge, deren Elemente wir den natürlichen Zahlen auf irgend eine bestimmte Art, etwa nach dem Schema von Bd. I, S. 201 zuordnen wollen:

$$(i, j) \sim n.$$

Sei P_m die Menge der Punkte z, wofür $n \leqq m$ ist. Dann ist P_m sicher in P_{m+1} enthalten. Aus dem Hilfssatze von § 18 schließen wir nun, daß es eine natürliche Zahl μ geben muß, derart, daß die Menge P_μ in einem zwei-dimensionalen Teile jenes Kreises überall dicht ist.

Wir wollen die Menge der Punkte z, welche zum Paare (i, j) gehören, mit Q_{ij} bezeichnen. Da nun P_μ aus einer endlichen Anzahl von Mengen Q_{ij} besteht, muß es ja auch eine dieser Mengen, $Q_{i'j'}$, geben, welche in einem zwei-dimensionalen Teile T der z-Ebene überall dicht ist.

Jetzt werde die Funktion $F(z, w)$ im Bereiche betrachtet, wofür w im Kreisringe

$$K': \qquad \frac{\varrho'}{i'+1} \leqq |w| \leqq \frac{\varrho'}{i'}$$

und z in T liegt. Dann ist

$$|F(z, w)| \leqq j'.$$

Denn $F(z, w')$, wo w' einen beliebigen Punkt des zu i' gehörigen Bereiches K' bedeutet, ist eine rationale Funktion von z, welche außerdem in den Punkten von $Q_{i'j'}$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als j' wird.

---

1) Insbesondere kann sich diese Menge auf eine endliche reduzieren. Die hierdurch hervorgerufene Vereinfachung des Beweises liegt dann auf der Hand.

Hiermit sind die Bedingungen des Satzes von § 17 erfüllt, woraus sich denn ergibt, daß $F(z, w)$ sich im Zylinderbereiche (T, K') analytisch verhält. Aber jetzt sind die Bedingungen des vorstehenden 2. Satzes schon erfüllt, und hiermit ist nun der Beweis geliefert.

Im Falle $n > 2$ ist, werde $z_n = w$, $n - 1 = m$ gesetzt. Dann wird die Funktion $F(z_1, \ldots, z_m, w)$ im Punkte $(z) = (a)$ betrachtet, wo $|a_k| < \varrho$, $k=1,\ldots,m$, ist, und r_a wird nun geradeso definiert, wie vorhin. Alsdann gilt auch für j die frühere Definition, und die Schlußweise gestaltet sich gerade so, wie vorhin.

Zusatz. *Ist die Funktion* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *so beschaffen, daß* $F(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ *ein Polynom in* z_k *allein*, $k=1, \ldots, n$, *ist, wobei* $(a_1, \ldots, a_n)$ *einen beliebigen Punkt der Umgebung* $|z_i| < \varrho$, $i=1,\ldots,n$, *des Anfangs bedeutet, so ist* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *ein Polynom in den* n *Variabelen* $(z_1, \ldots, z_n)$.

Aufgabe. Man gebe einen direkten Beweis des Zusatzes.

§ 31. Endgiltige Erweiterung des Weierstraßschen Satzes.

Auf Grund der beiden nachstehenden Hilfssätze wird ein Grad der Verallgemeinerung des Weierstraßschen Satzes von § 29 erreicht, welcher wenigstens für die Praxis wohl als definitiv angesehen werden dürfte.

1. Hilfssatz. *Vorgelegt sei eine Transformation*

$$z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

folgender Beschaffenheit. Die Funktionen f_i *verhalten sich meromorph in einem Punkte* $(z) = (a)$, *und ferner:*

i) *Es gibt eine Umgebung* σ *des Punktes* (a) *derart, daß derjenige Teil* σ' *davon, welcher nach Aushebung der singulären Stellen der* f_i *aus* σ *überbleibt, in umkehrbar eindeutiger Weise auf einen Bereich* T *des* (z')*-Raumes abgebildet wird.*

ii) *Der Bereich* T *enthält eine Folge von Punkten*

$$(\xi_1^{(k)}, 0, \ldots, 0), \qquad k=1,2,\ldots,$$

$$\lim_{k=\infty} \xi_1^{(k)} = \infty,$$

deren Bildpunkte in σ' *sich am Punkte* $(z) = (a)$ *häufen.*

Dann besteht die in σ' belegene Lösung der Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad z_1' = f_1(z_1, \ldots, z_n), \qquad f_k(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$
$$G < |z_1'|, \quad k = 2, \ldots, n,$$

aus einer Kurve

$$\text{(B)} \qquad z_i = \omega_i(\zeta), \qquad \zeta \neq 0, \qquad i=1, \ldots, n,$$

wo $\omega_i(\zeta)$ sich analytisch im Punkte $\zeta = 0$ verhält, und $\zeta = 1/z_1'$, $\omega_i(0) = a_i$ ist.

Zum Beweise setzen wir

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = \frac{g_i(z_1, \ldots, z_n)}{h_i(z_1, \ldots, z_n)}, \qquad i=1, \ldots, n,$$

wo g_i, h_i sich im Punkte $(z) = (a)$ analytisch verhalten und, sofern beide dort verschwinden, auch in (a) teilerfremd gegeneinander sind.

Betrachten wir zuerst die letzten $n-1$ Gleichungen (A). Zum Bestehen derselben ist notwendig, daß

$$\text{(2)} \qquad g_2(z_1, \ldots, z_n) = 0, \ldots, g_n(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wobei

$$g_2(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots, g_n(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Nach dem 2. Weierstraßschen Satze, Kap. 2, § 17, bestimmen die Gleichungen (2) ein oder mehrere Gebilde $\mathfrak{g}$.

Eines dieser Gebilde $\mathfrak{g}$ muß notwendig von der ersten Stufe sein. Indem wir nämlich

$$\zeta = 1/z_1'$$

setzen, nimmt die erste Gleichung (A) die Form an,

$$\zeta g_1(z_1, \ldots, z_n) = h_1(z_1, \ldots, z_n),$$

wobei der Voraussetzung ii) zufolge

$$h_1(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Wir betrachten ferner die Funktion

$$\text{(3)} \qquad \zeta = \frac{h_1(z_1, \ldots, z_n)}{g_1(z_1, \ldots, z_n)}$$

auf den verschiedenen Gebilden $\mathfrak{g}$. Auf einem derselben wird diese Funktion jedenfalls nicht durch das identische Verschwinden von $g_1(z_1, \ldots, z_n)$ illusorisch, denn dem Punkte $(z') = (\xi_1^{(k)}, 0, \ldots, 0)$

entspricht ja ein Punkt (z) von σ', und in einem Punkte von σ' verschwindet kein h_i. Sei $\mathfrak{g}'$ ein Gebilde $\mathfrak{g}$, worauf ein solcher Punkt (z) liegt. Würde nun g_1 auf $\mathfrak{g}'$ identisch verschwinden, so würde jeder der unendlich vielen Punkte von $\mathfrak{g}'$, worin keine Funktion h_i verschwindet, in den Punkt $(z') = 0$ übergeführt, was der Voraussetzung i) zuwider läuft.

Dieses Gebilde $\mathfrak{g}'$ kann aber auch nicht von höherer als der ersten Stufe sein. Denn sonst müßte die Funktion ζ, welche ja in einem gewissen Punkte desselben den Wert $1/\xi_1^{(k)}$ annimmt, auch in (unendlich vielen) anderen Punkten von $\mathfrak{g}'$ den gleichen Wert erhalten, und damit würden alle diese Punkte von σ' in ein und denselben Punkt von T übergeführt, was der Voraussetzung i) widerspricht.

Dieses Gebilde $\mathfrak{g}'$ möge nun durch die Gleichungen

$$(4) \qquad z_i = \psi_i(\lambda), \qquad i=1,\ldots,n,$$

dargestellt werden, wo ψ_i analytisch im Anfange und $\psi_i(0) = a_i$ ist. Im übrigen soll einer Stelle von $\mathfrak{g}'$ auch nur ein Wert von λ entsprechen.

Trägt man in der Funktion $g_1(z_1, \ldots, z_n)$ die Werte (4) der Argumente z_i ein, so entsteht dadurch eine Funktion von λ, welche sich im Punkte $\lambda = 0$ analytisch verhält und jedenfalls nicht identisch verschwindet. Denn $h_1(z_1, \ldots, z_n)$, gebildet für dieselben Werte der Argumente, verhält sich ebenfalls analytisch im Punkte $\lambda = 0$ und verschwindet nicht identisch, und z_1' hat am Gebilde $\mathfrak{g}'$ den Wert g_1/h_1. In jeder Nähe des Punktes (a) gibt es Punkte $\lambda^{(k)}$ von $\mathfrak{g}'$, in denen z_1' den Wert $(\xi_1^{(k)})$ annimmt, und hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Aus (3) ergibt sich somit, daß ζ, auf dem Gebilde $\mathfrak{g}'$ betrachtet, zu einer Funktion

$$(5) \qquad \zeta = \omega(\lambda)$$

wird, welche sich zunächst meromorph im Punkte $\lambda = 0$ verhält. Da nun aber ζ in den Punkten $\lambda^{(k)}$ den Wert $1/\xi_1^{(k)}$ annimmt, so kann $\omega(\lambda)$ keinen Pol im Punkte $\lambda = 0$ haben. Im übrigen ist $\omega(0) = 0$, und es muß ferner

$$\omega'(0) \neq 0$$

sein. Denn sonst würden einem in der Nähe des Anfangs belegenen Werte von $\zeta \neq 0$ mehrere Werte von λ entsprechen, und diese

würden wieder zu verschiedenen Punkten (z) von σ' führen, deren alle den gleichen Punkt $(1/\zeta, 0, \ldots, 0)$ von T lieferten.

Hiermit sind wir berechtigt, als Parameter λ geradezu die Variabele ζ zu nehmen, wodurch denn die Gleichungen (4) in die vom Satze verlangten Gleichungen (B) übergehen. Es bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß hiermit auch alle in σ' belegenen Lösungen des Systems (A) erschöpft sind.

Würde es nämlich ein zweites, in σ' belegenes Gebilde erster Stufe, $\mathfrak{g}''$, geben, so könnte man gerade so wie vorhin auf die Darstellung (4) desselben,

$$z_i = \overline{\omega}_i(\zeta), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

schließen, und hieraus würde man dann wiederum auf die Existenz zweier Punkte von σ' geführt, die ein und demselben Punkte $(1/\zeta, 0, \ldots, 0)$ von T entsprechen.

Hiermit ist der Beweis des Satzes völlig erbracht. Wir bemerken noch, daß es denkbarerweise, den Gleichungen (2) entsprechend, noch Gebilde $\mathfrak{g}$ erster oder sogar höherer Stufe gibt, welche dann am Rande von σ', also in der singulären Mannigfaltigkeit der Transformation (1) liegen und somit für die eigentliche Transformation (1) belanglos sind.

2. Hilfssatz. *Verhält sich eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Anfange analytisch und in jedem endlichen Punkte der z_1-Achse,*

$$(z_1, 0, \ldots, 0), \qquad |z_1| < \infty,$$

meromorph; geht F ferner durch die Umkehrung der Transformation (1) in eine im Punkte $(z) = (a)$ meromorphe Funktion[1]) *über,*

$$F(z_1', \ldots, z_n') = \Phi(z_1, \ldots, z_n),$$

so ist $F(z_1, 0, \ldots, 0)$ eine rationale Funktion von z_1.

Vor allem wollen wir nachweisen, daß die Funktion

$$F(z_1, 0, \ldots, 0) = \varphi(z_1)$$

im Endlichen höchstens Pole besitzt.

Hat die Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine endliche singuläre Stelle $(\gamma_1, 0, \ldots, 0)$, so muß jedenfalls $\gamma_1 \neq 0$ sein. Sei $(c_1, 0, \ldots, 0)$ eine solche Stelle, welche dem Anfange am nächsten liegt,

1) Sofern man wenigstens von etwaigen hebbaren Unstetigkeiten absieht.

d. h. $F(z_1, \ldots, z_n)$ verhält sich analytisch in jedem Punkte $(a_1, 0, \ldots, 0)$, wofür $|a_1| < |c_1|$ ist, nicht aber im Punkte $(c_1, 0, \ldots, 0)$.

In der Nähe von $(c_1, 0, \ldots, 0)$ läßt F die Darstellung zu,

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{E_0 + E_1(z_1 - c_1) + \cdots}{E_0' + E_1'(z_1 - c_1) + \cdots},$$

wobei $E_k(z_2, \ldots, z_n)$, $E_k'(z_2, \ldots, z_n)$ sich in einer bestimmten Umgebung des Anfangs analytisch verhalten und $E_0'(0, \ldots, 0) = 0$ ist. Nun kann aber $E_k'(0, \ldots, 0)$ nicht für alle Werte von k verschwinden, sofern wir voraussetzen, daß Zähler und Nenner im Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (c_1, 0, \ldots, 0)$ teilerfremd sind. Denn sonst würde der Nenner in einem Punkte $(b_1, 0, \ldots, 0)$ verschwinden, wo b_1 in der Nähe von c_1 liegt und $|b_1| < |c_1|$ ist. Diese Stelle würde dann eine dem Anfange noch näher belegene Singularität der Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ liefern, was zu einem Widerspruch führt.

Bezeichnen wir $E_k(0, \ldots, 0)$, $E_k'(0, \ldots, 0)$ bzw. mit e_k, e_k', so erhalten wir für die Funktion

$$F(z_1, 0, \ldots, 0) = \varphi(z_1)$$

in der Nähe von c_1 die Darstellung

$$\varphi(z_1) = \frac{e_0 + e_1(z_1 - c_1) + \cdots}{e_m'(z_1 - c_1)^m + \cdots}, \qquad e_m' \neq 0, \qquad 1 \leqq m,$$

woraus denn ersichtlich wird, daß $\varphi(z_1)$ höchstens einen Pol im Punkte $z_1 = c_1$ hat.

Untersuchen wir jetzt das Verhalten der Funktion $\varphi(z_1)$ in der Nähe der Stelle $z_1 = \infty$! Sei

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G(z_1, \ldots, z_n)}{H(z_1, \ldots, z_n)},$$

wo G und H im Punkte $(z) = (a)$ teilerfremd gegeneinander sind, falls beide dort verschwinden. Es kann nun H unmöglich auf dem aus der Kurve (B) bestehenden Gebilde $\mathfrak{g}$ identisch verschwinden, denn die endlichen in der Mannigfaltigkeit $z_k' = 0$, $k = 2, \ldots, n$, belegenen singulären Stellen von $F(z_1', \ldots, z_n')$ sind ja isoliert, und darum verhält sich die Funktion analytisch in gewissen Punkten von T, welche Punkten der Mannigfaltigkeit entsprechen. Trägt man also in $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ die Werte von z_i aus (B) ein, so

entsteht eine im Punkte $\zeta = 0$ meromorphe Funktion,

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \Omega(\zeta).$$

Mithin wird

$$F(z_1', 0, \ldots, 0) = \Omega\left(\frac{1}{z_1'}\right),$$

und $\varphi(z_1')$ erweist sich somit auch im Punkte $z_1' = \infty$ als meromorph.

Da $\varphi(z_1)$ sich nunmehr in jedem Punkte der erweiterten z_1-Ebene meromorph verhält, so ist $\varphi(z_1)$ eine rationale Funktion, w. z. b. w.

Aus den beiden voraufgeschickten Hilfssätzen, nebst dem 2. Satze von § 30, erschließt man nun das in Aussicht genommene Theorem, welches wir folgendermaßen formulieren wollen.

Endgiltige Erweiterung des Weierstraßschen Satzes. *Sei $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Anfange analytisch und in jedem endlichen Punkte einer jeden der Koordinatenachsen meromorph. Genügt F ferner den Bedingungen des 2. Hilfssatzes, für jede der n Koordinatenachsen ausgesprochen, so ist $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine rationale Funktion aller n Argumente.*

§ 32. Meromorphe Funktionen im erweiterten Raume.

Es handelt sich hier um die erweiterten Räume von Kap. 1, §§ 18, 19, sowie um andere Räume ähnlicher Art nebst den zugehörigen Transformationsgruppen, und um Funktionen, welche sich in einem solchen Raume überall meromorph verhalten.

Definition eines erweiterten Raumes. Dem Begriffe eines erweiterten Raumes liegt eine Transformationsgruppe zugrunde, wodurch der komplexe Euklidische Raum im allgemeinen umkehrbar eindeutig und analytisch in sich übergeführt wird. Sei

$$z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

eine der Transformationen dieser Gruppe. Dann möge sich f_i vor allem in jedem endlichen Punkte meromorph verhalten. Sei $(z) = (a)$ eine (eigentliche, d. h. endliche) singuläre Stelle für wenigstens eine der f_i und sei σ eine Umgebung von (a). Bezeichnet man mit σ' denjenigen Teil von σ, welcher nach Aushebung der singulären Stellen der f_i aus σ zurückbleibt, so werde σ' umkehrbar eindeutig und analytisch auf einen Bereich T abgebildet, und

zwar lasse sich σ so einschränken, daß T außerhalb eines beliebigen endlichen Teiles des eigentlichen Raumes liegt.

Dem Punkte (a) wird nun ein uneigentlicher Punkt A' vermöge einer spezifischen Definition entsprechen. Wie die Gruppe beschaffen sein muß, damit eine Definition der Art möglich sei, wie sie in den bisher bekannten Fällen getroffen worden ist, mag dahingestellt bleiben. Wir können aber gewisse Eigenschaften der Transformationen angeben, welche bei einer Erweiterung der gemeinten Art nicht fehlen dürfen.

i) Sei

$$z_i' = \varphi_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

eine Transformation der Gruppe, wodurch der eigentliche Punkt $(z) = (b)$ in den obigen eigentlichen Punkt $(z') = (a)$ übergeführt wird. Übt man zuerst (2) und darauf (1) aus, so entsteht dadurch eine Transformation der Gruppe, wodurch dem Punkte $(z) = (b)$ ein uneigentlicher Punkt B' entspricht. Und nun soll B' eben mit A' identisch sein.

Definition. Unter der *Umgebung* eines uneigentlichen Punktes A' versteht man die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Punkte, welche einer Umgebung eines zugehörigen endlichen Punktes $(z) = (a)$ entsprechen.

Sei $P_1, P_2, \ldots$ eine Folge eigentlicher oder uneigentlicher Punkte. Dann heißt A' eine *Häufungsstelle* der Menge, wenn Punkte P_i in jede Umgebung von A' eindringen. Entspricht einer beliebigen Umgebung von A' eine Zahl m derart, daß alle P_i, wofür $m \leqq i$, in derselben liegen, so heißt A' der *Grenzpunkt* der Menge.

ii) Sei A' ein uneigentlicher Punkt, und sei $(z^{(k)})$, $k=1,2,\ldots$, eine Menge eigentlicher Punkte mit der Grenzstelle A'. Dann ist

$$\lim_{k=\infty} \sum_{i=1}^{n} | z_i^{(k)} | = \infty.$$

Aus dem Grunde bezeichnet man die uneigentlichen Punkte auch als *unendlich ferne Punkte* und deren Gesamtheit als den *unendlich fernen Bereich.*

iii) Im übrigen lassen sich die Umgebungen zweier uneigentlichen Punkte A' und B', bei beliebiger Wahl der einen und geeigneter Wahl der anderen, umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbilden.

iv) Die uneigentlichen Punkte bilden eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit. Durch dieselben werden die eigentlichen Punkte auch zu einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit (dem erweiterten Raume) ergänzt. Insbesondere dringt jeder Strahl

$$z_i = a_i + \lambda_i t, \qquad 0 < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \qquad 0 \leqq t < \infty, \qquad {\scriptstyle i=1,\ldots,n,}$$

in jede Umgebung mindestens eines uneigentlichen Punktes A' ein.

Daraus ergibt sich, daß es eine endliche Anzahl von Transformationen der Gruppe gibt, derart, daß ein beliebiger uneigentlicher Punkt mindestens durch eine derselben in einen endlichen Punkt übergeführt wird.

Der erweiterte Raum hängt offenbar linear einfach zusammen.

Definition. Eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ verhält sich *analytisch* resp. *meromorph* in einem uneigentlichen Punkte A', wenn die transformierte Funktion,

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = F(z'_1, \ldots, z'_n)$$

sich in einem zugehörigen eigentlichen Punkte $(z) = (a)$ (höchstens bis auf hebbare Unstetigkeiten) analytisch resp. meromorph verhält.

Hauptsatz. *Eine Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, welche sich in jedem Punkte eines erweiterten Raumes meromorph verhält, ist eine rationale Funktion.*

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Funktion sich im Anfange analytisch verhält. Sie wird sich ferner in jedem endlichen Punkte einer Koordinatenachse meromorph verhalten.

Betrachten wir nun etwa den Strahl

$$L: \qquad z_1 = t, \qquad 0 \leqq t < \infty; \qquad z_k = 0, \qquad {\scriptstyle k=2,\ldots,n.}$$

Derselbe dringt ja in jede Umgebung mindestens eines uneigentlichen Punktes A'. Sei $(z) = (a)$ ein eigentlicher dem Punkte A' zugehöriger Punkt. Dann genügt die zugehörige Transformation (1) dieses Paragraphen sämtlichen Bedingungen der Transformation (1) von § 31. Das gleiche gilt für jede andere der Koordinatenachsen. Nach dem erweiterten Weierstraßschen Satze, § 31, erweist

sich F somit als eine rationale Funktion aller n Argumente $z_1, \ldots, z_n$.

Der vorstehende Satz wurde für den projektiven Raum vom Verfasser bewiesen.[1])

Sodann wurde der Beweis für die zusammengesetzten Räume, Kap. 1, § 19, von Jackson[2]) geführt.

Aus diesem Satze geht der folgende unmittelbar hervor.

Satz. *Verhält sich die Transformation* (1) *auch in den uneigentlichen Punkten des erweiterten Raumes meromorph, so sind die* f_i *rationale Funktionen.*

§ 33. Von den umkehrbar eindeutigen Transformationen eines Raumes in sich.

Eine Transformation

$$(1) \qquad z'_i = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

heiße *regulär* in einem Punkte $(z) = (a)$, wenn die Umgebung des Punktes (a) ein-eindeutig und stetig auf die Umgebung des Bildpunktes (a') bezogen wird und außerdem jede der Funktionen f_i sich im Punkte (a) analytisch verhält. Nach Kap. 2, § 19, 1. Satz verschwindet dann die Jacobische Determinante der Transformation im Punkte (a) nicht, womit sich denn die Umkehrfunktionen

$$z_i = f'_i(z'_1, \ldots, z'_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

als analytisch im Punkte $(z') = (a')$ erwiesen.

Diese Definition läßt sich noch auf den Fall ausdehnen, daß mindestens einer der Punkte im unendlich fernen Bereiche liegt. Wir gehen nämlich von einem erweiterten Raume aus, wie er in § 32 des näheren erklärt worden ist, und betrachten eine Transformation (1), wodurch die Umgebung eines unendlichen Punktes A' in die Umgebung eines eigentlichen oder uneigentlichen Punktes A'' ein-eindeutig und stetig übergeht. Eine solche Transformation heißt *regulär*, wenn sie in jedem eigentlichen Punktepaare regulär ist.

---

1) Osgood, *Transactions Amer. Math. Soc.* 13 (1912), S. 159. Dabei wurde eine interessante $(1, n!)$-deutige Transformation des Raumes der Funktionentheorie auf den projektiven Raum benützt.

2) Dunham Jackson, *Journ. für Math.* 146 (1915), S. 185.

Satz. *Ist die Transformation* (1) *im Punkte A' regulär, so verhalten sich die Funktionen f_i im Punkte A' meromorph.*

Wir behandeln zuerst den Fall, daß A' in einen endlichen Punkt $A'': (z') = (a')$ übergeht. Sei

$$S: \qquad z_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{g_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

eine Transformation der Gruppe, wodurch ein endlicher Punkt $B: (\xi) = (b)$ in A' verwandelt wird. Dann wird eine Umgebung σ von B umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Umgebung τ von A'' bezogen. Einem Punkte (ξ) von σ, der nur auf keinem der Gebilde $h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ liegt, entspricht ein endlicher Punkt (z) der Umgebung von A', und dieser Punkt wird wieder durch die Transformation (1) in einen Punkt (z') von τ übergehen. Jede der genannten Transformationen ist regulär in einem endlichen Punkte und darum verhalten sich die Funktionen

$$z'_i = f_i(z_1, \ldots, z_n) = \psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

analytisch in jedem Punkte von σ, der nicht auf einem Gebilde $h_i = 0$ liegt. Da sie fernerhin stetig auf diesen Gebilden sind, so verhalten sie sich auch dort und also ausnahmslos in σ analytisch.

Hiermit ist aber eben dargetan, daß die Funktionen $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ sich in A' analytisch verhalten.

Wird umgekehrt durch die Transformation (1) ein endlicher Punkt $(z) = (a)$ in einen uneigentlichen Punkt P übertragen, so zeigt eine ähnliche Überlegung, daß die Funktionen $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ sich in (a) meromorph verhalten.

Wir wenden uns jetzt dem Falle zu, daß A'' im Unendlichen liegt, und führen wieder die Transformation S aus. Hier brauchen wir aber noch eine zweite Transformation der Gruppe,

$$S': \qquad z'_i = \varphi'_i(\xi'_1, \ldots, \xi'_n),$$

wodurch ein endlicher Punkt $B': (\xi') = (b')$ in A'' verwandelt wird. Bezeichnet man die Transformation (1) mit T, so wird durch die Transformation

$$S'^{-1}TS: \qquad \xi'_i = \omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

die Umgebung σ von B auf eine Umgebung σ' von B' umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet. Es handelt sich nun um den Beweis, daß $\omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sich in σ analytisch verhält.

Ist (ξ) ein Punkt von σ, dem ein endlicher Punkt (z) der Umgebung von A' entspricht, also $h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, und geht (z) durch T wieder in einen endlichen Punkt der Umgebung von A'', so wird $\omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ schon analytisch im Punkte (ξ) sein.

Sei (ξ) wieder ein Punkt von σ, dem ein endlicher Punkt (z) der Umgebung von A' entspricht, nur soll jetzt dem Punkte (z) ein uneigentlicher Punkt P der Umgebung von A'' entsprechen. Durch S'^{-1} wird P in einem Punkt (ξ') von σ' verwandelt. Und nun liegt genau der soeben behandelte Fall vor, wobei nur, was die Bezeichnungsweise anbetrifft, (z) und (z') ihre Rollen gewechselt haben, und (ξ') an Stelle von (ξ) tritt. Darum ist die Transformation der Umgebung dieses Punktes (z) auf die Umgebung des entsprechenden Punktes (ξ') eine reguläre (beide Punkte sind ja eigentliche), woraus denn endlich hervorgeht, daß $\omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sich im bewußten Punkte (ξ) analytisch verhält.

Hiermit ist nunmehr erwiesen worden, daß $\omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sich in jedem Punkte von σ analytisch verhält, der nur nicht auf einem Gebilde $h_i = 0$ liegt. Dort bleibt ω_i aber noch stetig, und darum ist ω_i auch dort, und somit ausnahmslos in σ analytisch.

Kehren wir jetzt zur Transformation

$$S': \qquad z_i' = \varphi_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n') = \frac{g_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n')}{h_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n')}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

zurück! Da ξ_i' analytisch von (ξ) abhängt,

$$\xi_i' = \omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

so gehen auch $g_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n')$, $h_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n')$ in analytische Funktionen von (ξ) über,

$$g_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n') = G_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

$$h_i'(\xi_1', \ldots, \xi_n') = H_i(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

und daraus ergibt sich nun die Darstellung

$$z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n) = \frac{G_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{H_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)}. \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Darin liegt aber eben der Beweis, daß die Funktionen f_i sich im Punkte A' meromorph verhalten.

Aus dem vorstehenden Satze ergibt sich der Beweis des folgenden Theorems.

Hauptsatz. *Die allgemeinste umkehrbar eindeutige Transformation eines erweiterten Raumes in sich, welche ausnahmslos regulär ist, kann nur eine rationale Transformation sein.*

Sei (1) eine solche Transformation. Dann verhalten sich die Funktionen f_i nach dem soeben bewiesenen Satze meromorph in jedem Punkte des erweiterten Raumes und erweisen sich mithin als rationale Funktionen.

Wir werfen nun die Frage auf: *Welches sind die ein-eindeutigen Transformationen eines gegebenen Raumes in sich, welche in jedem Punkte regulär sind?* und beantworten sie für den Raum der Funktionentheorie, sowie für den projektiven Raum.

Fangen wir mit dem *Raume der Funktionentheorie* an. Wir können unmittelbar eine Reihe derartiger Transformationen hinschreiben, nämlich die Transformationen der Gruppe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad z_i' = \frac{\alpha_k z_k + \beta_k}{\gamma_k z_k + \delta_k}, \qquad \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k \neq 0, \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Satz. *Die Transformationen* ($\mathfrak{A}$) *umfassen alle diejenigen, welche die genannte Eigenschaft besitzen.*

Sei (1) eine bestimmte Transformation der genannten Art. Dann sind die Funktionen f_i alle rational. Verhält sich f_1 nicht analytisch in einem Punkte (a), so kann f_1 dort nur einen Pol haben. Denn beim Grenzübergange $\lim (z) = (a)$ muß sich der Punkt (z') einem bestimmten Punkte des erweiterten Raumes der Variabelen (z') nähern. Insbesondere muß dann jede Variabele z_k' einem bestimmten Punkte der erweiterten z_k'-Ebene zustreben. Und da nun z_1' nicht endlich bleibt, so muß eben $\lim z_1' = \infty$ sein.

Zweitens behaupte ich, daß f_1 nur von einem Argumente abhängt. Wäre dem nicht so, so möge f_1 wenigstens z_1, z_2 enthalten. Sei

$$f_1 = \frac{G(z_1, z_2, \ldots)}{H(z_1, z_2, \ldots)},$$

wo G und H teilerfremde Polynome bedeuten. Indem wir jetzt homogene Variabelen einführen:

$$z_k = \frac{\zeta_k}{\zeta_k'}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

sei

$$f_1 = \frac{\Gamma(\zeta_1, \zeta_1'; \zeta_2, \zeta_2'; \ldots)}{\mathrm{H}(\zeta_1, \zeta_1'; \zeta_2, \zeta_2'; \ldots)},$$

wo Γ, H ebenfalls teilerfremd sind. Dann wird

$$\Gamma = A_0 \zeta_1^m + A_1 \zeta_1^{m-1} \zeta_1' + \cdots + A_m \zeta_1'^m,$$
$$\mathrm{H} = B_0 \zeta_1^m + B_1 \zeta_1^{m-1} \zeta_1' + \cdots + B_m \zeta_1'^m,$$

wo alle A_k, B_k homogen von gleicher Dimension[1]) in (ζ_2, ζ_2') sind, und zwar ist diese Dimension positiv. Daraus erhellt, daß die Gleichungen

$$\Gamma = 0, \qquad \mathrm{H} = 0$$

mindestens eine gemeinsame Wurzel $(\alpha_1, \alpha_1'; \alpha_2, \alpha_2'; \ldots)$ haben. Sollte der entsprechende Punkt $(z) = (a)$ insbesondere im Unendlichen liegen, wobei denn

$$\alpha_k' = 0, \qquad k = k_1, \ldots, k_l,$$

so führe man die Transformation aus:

$$z_j' = z_j, \qquad j \neq k_1, \ldots, k_l,$$

$$z_j' = \frac{1}{z_j}, \qquad j = k_1, \ldots, k_l.$$

Dadurch wird

$$f_1 = \frac{G'(z_1', z_2', \ldots)}{H'(z_1', z_2', \ldots)},$$

wobei nun G', H' teilerfremde Polynome mit einer gemeinsamen Nullstelle sind. Daher hat f_1 eine außerwesentliche singuläre Stelle zweiter Art im Punkte (a), und hiermit sind wir zu einem Widerspruch geführt.

Es hat sich also ergeben, daß f_i nur von einem einzigen Argumente abhängen kann, und man erkennt nun sofort, daß alle n z_k bei den n verschiedenen f_i vertreten sein müssen. Soll die Transformation (1) außerdem noch umkehrbar eindeutig sein, so muß jede Funktion f_i linear von ihrem Argument z_k abhängen; und damit ist der Beweis erbracht.

Der projektive Raum. Diesem Raume liegt die Gruppe zugrunde:

$$(\mathfrak{B}) \qquad x_i' = \frac{c_1^{(i)} x_1 + \cdots + c_n^{(i)} x_n + c_0^{(i)}}{c_1^{(0)} x_1 + \cdots + c_n^{(0)} x_n + c_0^{(0)}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\Sigma \pm c_1^{(1)} c_2^{(2)} \ldots c_n^{(n)} c_0^{(0)} \neq 0,$$

1) Genauer gesagt, verschwinden die A_k, sowie die B_k, nicht sämtlich identisch, und diejenigen, welche nicht identisch verschwinden, sind homogen von gleicher Dimension in jedem Wertepaare (ζ_k, ζ_k'), $k = 2, \ldots, n$. Insbesondere ist die Dimension in (ζ_2, ζ_2') positiv.

und die hiermit definierten Transformationen gehören jedenfalls zur bewußten Gattung. Auch hier gilt der

Satz. *Die Transformationen* ($\mathfrak{B}$) *umfassen alle diejenigen, welche die genannte Eigenschaft besitzen.*

Vor allem erkennt man, daß die Funktionen (1) rational sind. Schreiben wir diese Funktionen in der Form hin:

$$\mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{F_i(x_1, \ldots, x_n)}{F_0(x_1, \ldots, x_n)},$$

wo $F_0, F_1, \ldots, F_n$ ein System teilerfremder Polynome bedeuten, und führen wir homogene Variabelen vermöge der Relationen

$$x_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ein, so wird

$$\mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_i(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_0(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

wobei $f_0, f_1, \ldots, f_n$ ein System teilerfremder homogener Polynome m-ten Grades sind.

In einem endlichen Punkte $(x) = (a)$, dessen Bildpunkt $(x') = (a')$ auch endlich ist, sind die Funktionen $\mathfrak{F}_i$ alle analytisch, und ihre Jacobische Determinante verschwindet dort nicht. Nun ist aber bekanntlich

$$\frac{\partial(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{m F_0^{n+1} \xi_0^{(n+1)(m-1)}} \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)}.$$

Demgemäß muß die letztere Jacobische Determinante in einem Bildpunkte $(\xi) = (\alpha)$ ebenfalls von null verschieden sein.

Liegt einer oder auch beide der Punkte (a), (a') im Unendlichen, so ergibt sich, daß auch in diesem Falle

$$(3) \qquad \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)} \neq 0$$

ist. Hiermit sind wir zum Resultat gelangt, daß die Relation (3) ausnahmslos in jedem Punkte des Raumes der homogenen Variabelen $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ statthat. Die linke Seite von (3) ist aber ein homogenes Polynom vom Grade $(n+1)(m-1)$. Darum muß es eine Konstante sein, woraus sich nun ergibt, daß $m = 1$, daß also die Funktionen f_i linear sein müssen. Hiermit ist der Beweis erbracht.

§ 34. Über algebraische Funktionen.

Der Satz von Bd. I, Kap. 8, S. 431 läßt sich direkt auf Funktionen mehrerer Variabelen übertragen.

1. Satz. *Eine mehrdeutige*[1]) *Funktion* $F(z_1, \ldots, z_n)$, *deren verschiedene Bestimmungen in der Umgebung einer willkürlichen Stelle* (a) *eines im Sinne von § 32 erweiterten Raumes der Variabelen* (z) *sich mit den Wurzeln einer endlichen Anzahl irreduktibeler pseudoalgebraischer Gleichungen mit der Spitze* (a) *decken:*

$$A_0 w^q + A_1 w^{q-1} + \cdots + A_q = 0,$$

wobei also $A_k(z_1, \ldots, z_n)$ *sich im Punkte* $(z) = (a)$ *analytisch verhält und* $A_0(z_1, \ldots, z_n) \not\equiv 0$, *genügt einer algebraischen Gleichung*

$$G(w, z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo G *ein Polynom in allen* $n + 1$ *Variabelen bedeutet.*

Da der erweiterte Raum eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit ist, und da die Anzahl der Funktionswerte in einer bestimmten Umgebung eines willkürlichen Punktes dieses Raumes nach Voraussetzung endlich und in der genannten Umgebung konstant ist, so muß diese Zahl auch im ganzen Raume endlich und konstant sein. Dieselbe werde mit m bezeichnet.

Bildet man nun die Summe

$$\varphi_s = w_1^s + w_2^s + \cdots + w_m^s, \qquad s = 1, 2, \ldots, m,$$

so erkennt man, daß dieselbe in jedem Punkte des erweiterten Raumes höchstens einen Wert annimmt, sowie daß sie sich ausnahmslos meromorph verhält. Demnach muß sie eine rationale Funktion sein. Nun lassen sich aber die elementaren symmetrischen Funktionen

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m,$$

$$w_1 w_2 + w_1 w_3 + \cdots + w_{m-1} w_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_1 w_2 \ldots w_m$$

1) An dieser Stelle ist dem gegenwärtigen Satze eine allgemeinere Formulierung wie früher im Falle $n = 1$ zuerteilt worden, und hiermit ist denn auch eine Verallgemeinerung jenes Satzes gegeben.

rational durch die φ_i's ausdrücken. Daher sind die Wurzeln der Gleichung

$$(w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_m) = 0$$

rationale Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$, und der Satz ist bewiesen.

2. Satz. *Wird* $w = F(z_1, \ldots, z_n)$ *durch eine algebraische Gleichung*

$$G(w, z_1, \ldots, z_n) = 0$$

definiert, so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Irreduktibilität des Polynoms G darin, daß der Riemannsche Raum für $F(z_1, \ldots, z_n)$ *nicht zerfällt. Dabei wird vom trivialen Falle abgesehen, daß G eine Potenz eines irreduktibelen Polynoms ist.*

Der Beweis wird gerade so geführt wie im Falle $n = 1$.

Definition. Sei

$$A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0, \qquad A_0 \not\equiv 0, \qquad m > 0,$$

eine irreduktibele algebraische Gleichung, wobei also die A_k's ein System teilerfremder Polynome in $z_1, \ldots, z_n$ bedeuten. Ist A_0 eine Konstante, so heißt w eine *ganze* algebraische Funktion von $z_1, \ldots, z_n$, im anderen Falle eine *gebrochene*. Eine ganze algebraische Funktion ist in jedem endlichen Punkte stetig. Dies gilt aber nicht von einer gebrochenen Funktion. Vermöge der Transformation

$$w' = A_0 w, \qquad w = \frac{w'}{A_0} \tag{1}$$

geht eine gebrochene in eine ganze algebraische Funktion über.

3. Satz. *Sei*

$$G(w, z_1, \ldots, z_n) = 0$$

eine irreduktibele algebraische Gleichung von positivem Grade m in w, sei $w = F(z_1, \ldots, z_n)$ *die hierdurch definierte Funktion, und sei* $\mathfrak{S}$ *der zugehörige Riemannsche Raum. Sei ferner*

$$W = \Phi(z_1, \ldots, z_n)$$

eine Funktion, welche auf $\mathfrak{S}$ *eindeutig ist und deren verschiedene Bestimmungen den Bedingungen des* 1. *Satzes genügen. Dann läßt sich W als eine rationale Funktion von* $w, z_1, \ldots, z_n$ *darstellen:*

$$W = R(w, z_1, \ldots, z_n).$$

Der Beweis wird ähnlich wie im Falle $n=1$, Bd. I, S. 435 geführt, nur an einer Stelle ist ein anderes Verfahren nötig. Um nämlich nachzuweisen, daß die Koeffizienten von $\Omega(\lambda)$ rational sind, beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß sowohl w als W ganze und darum im Endlichen stetige Funktionen sind. Die bewußten Koeffizienten sind eindeutige Funktionen, welche sich im allgemeinen analytisch verhalten. Dabei liegen die Ausnahmepunkte auf analytischen Gebilden $(n-1)$-ter Stufe im Gebiete der $(z_1, \ldots, z_n)$. In diesen Punkten sind die Koeffizienten aber auch stetig. Nach dem 1. Satze von § 4 sind sie also dort ebenfalls analytisch.

Hiermit ist zunächst dargetan, daß die Koeffizienten ganze Funktionen sind. Um noch zu zeigen, daß sie rational sind, knüpfen wir an den 2. Satz von Kap. 1, § 16 an. Man erkennt nämlich ohne Mühe, daß bei passender Wahl der natürlichen Zahl μ und beliebiger Wahl von k

$$\lim_{z_k=\infty} \frac{w}{z_k^\mu} = 0, \qquad \lim_{z_k=\infty} \frac{W}{z_k^\mu} = 0$$

ist, wobei $z_i = a_i$, $i \neq k$, beliebig gewählt und dann festgehalten wird. Demgemäß muß auch

$$\lim_{z_k=\infty} \frac{C}{z_k^{m\mu}} = 0$$

sein, wo C einen beliebigen jener Koeffizienten bedeutet. Nach dem genannten Satze erweist sich C somit als ein Polynom.

Ist endlich w oder W keine ganze algebraische Funktion, so braucht man nur durch eine gehörige Transformation (1):

$$w' = A_0 w \qquad \text{bzw.} \qquad W' = B_0 W$$

zu ganzen Funktionen überzugehen. Nach dem Vorausgehenden gilt dann der Satz für w' und W', mithin gilt er auch für w und W.

1. Zusatz. *Hat die vorstehende Funktion $W = \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ im allgemeinen verschiedene Werte in den m Blättern von $\mathfrak{S}$ — dazu genügt ja offenbar, daß $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ auch nur für einen einzigen Punkt $(z) = (a)$ getrennte Werte hat —, so kann man umgekehrt w als rationale Funktion von $W, z_1, \ldots, z_n$ darstellen:*

$$w = \Re(W, z_1, \ldots, z_n).$$

Definition. Ist $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ eindeutig auf $\mathfrak{S}$ oder auch in dem einer beliebigen irreduktibelen pseudoalgebraischen Gleichung entsprechenden Riemannschen Raume $\mathfrak{F}$, und verhält sich Φ bis auf die Punkte einer endlichen Anzahl analytischer Gebilde $(n-1)$-ter Stufe analytisch; nimmt Φ ferner in zwei verschiedenen Blättern niemals identisch gleiche Werte an, so heißt Φ mit der Funktion $w = F(z_1, \ldots, z_n)$ oder auch mit $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{F}$ *gleichverzweigt*. Zwei Funktionen, welche irreduktibelen pseudoalgebraischen Gleichungen genügen, heißen in einem Punkte (a) miteinander gleichverzweigt, wenn jede derselben in dem für die andere konstruierten Riemannschen Raume in der Umgebung von (a) eindeutig ist.

2. Zusatz. *Sei $W = \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche den Bedingungen des* 3. *Satzes genügt, und sei Φ außerdem mit $\mathfrak{S}$ gleichverzweigt. Dann läßt sich w rational durch $W, z_1, \ldots, z_n$ darstellen:*

$$w = \Re(W, z_1, \ldots, z_n).$$

Ist umgekehrt $W = \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche den Bedingungen des 3. *Satzes genügt, und läßt w außerdem die vorstehende Darstellung zu, so ist Φ mit $\mathfrak{S}$ gleichverzweigt.*

3. Zusatz. *Ist $W = \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion, welche den Bedingungen des* 3. *Satzes genügt, so deckt sich Φ mit den Wurzeln einer irreduktibelen algebraischen Gleichung vom Grade m_1:*

$$H(W, z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo m_1 ein Teiler von m ist.

1. Aufgabe. Ist der folgende Satz richtig, a) im projektiven Raume, b) im Raume der Funktionentheorie?

Sei $\mathfrak{G}$ ein monogenes analytisches Gebilde $(n-1)$-ter Stufe im Raume der Variabelen $(z_1, \ldots, z_n)$, deren sämtliche in der Nähe einer beliebigen Stelle $(z) = (a)$ derselben gelegene Stellen sich mit den Wurzeln einer Gleichung

$$G_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

decken, wobei $G_{(a)}$ sich im Punkte (a) analytisch verhält und dort verschwindet. Dann ist $\mathfrak{G}$ ein algebraisches Gebilde.

2. Aufgabe. Ist der folgende Satz richtig, a) im projektiven Raume, b) im Raume der Funktionentheorie?

Sei $\mathfrak{G}$ ein monogenes analytisches Gebilde $(n-1)$-ter Stufe im Raume der Variabelen $(z_1, \ldots, z_n)$, und sei $(z) = (a)$ eine beliebige Grenzstelle zu $\mathfrak{G}$ gehöriger Stellen. Des weiteren sollen sämtliche in der Nähe von (a) gelegene Stellen von $\mathfrak{G}$ sich mit den Wurzeln einer Gleichung

$$G_{(a)}(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

decken, wobei $G_{(a)}$ sich im Punkte (a) analytisch verhält und dort verschwindet. Dann ist $\mathfrak{G}$ ein algebraisches Gebilde.

Definition. Eine mehrdeutige Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ *verhält sich algebraisch* in einem Punkte $(z) = (a)$ des erweiterten Raumes, wenn die in Betracht kommenden Bestimmungen derselben sich in der Nähe von (a) mit den Wurzeln einer pseudoalgebraischen Gleichung decken:

$$A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

wo $A_k(z_1, \ldots, z_n)$ sich im Punkte (a) analytisch verhält und $A_0 \not\equiv 0$ ist.

Satz. *Sei $F(z_1, \ldots, z_n)$ eine mehrdeutige Funktion, deren verschiedene Bestimmungen sich in jedem zu einer Koordinatenachse gehörigen Punkte des erweiterten Raumes der Funktionentheorie algebraisch verhalten. Dann ist F eine algebraische Funktion der n Variabelen $z_1, \ldots, z_n$ oder aber F setzt sich aus mehreren solchen Funktionen zusammen.*

Vor allem beweist man, daß die Anzahl m der verschiedenen Bestimmungen $w_1, \ldots, w_m$ der vorgelegten Funktion in einer bestimmten Umgebung $\mathfrak{T}$ der Koordinatenachsen konstant bleibt. Im übrigen darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß sich alle m Bestimmungen im Anfange analytisch verhalten. Bildet man nun die Funktion

$$\Phi_s(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{m} w_i^s,$$

wo s eine natürliche Zahl bedeutet, so verhält sich Φ_s in $\mathfrak{T}$ meromorph. Daraus erhellt, daß auch die elementaren symmetrischen Funktionen

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m,$$

$$w_1 w_2 + w_1 w_3 + \cdots + w_{m-1} w_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_1 w_2 \ldots w_m$$

sich in $\mathfrak{T}$ meromorph verhalten. Nach dem 3. Satze von § 30 erweisen sich diese somit als rationale Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$, und hiermit ist der Beweis erbracht.

Bei der Formulierung des Satzes dürfen ja beliebige n Geraden an Stelle der Koordinatenachsen treten:

$$z_1 = c_1, \ldots, z_{k-1} = c_{k-1}, z_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, z_n = c_n,$$

wobei k die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchläuft und insbesondere einige oder auch alle c_i mit dem uneigentlichen Punkte ∞ ihrer Ebene zusammenfallen können.

Konforme Abbildung. Von weil. Oberl. *L. Lewent,* Berlin. Mit 40 Fig. [VI u. 118 S.] 8. 1912. (Samml. math.-physik. Lehrb. Bd. 14.) Kart. *RM* 3.80

„Der Techniker wird aus dem Büchlein reiche Anregung empfangen, durch eine Fülle interessanter und lehrreicher Beispiele wird er verhältnismäßig schnell bis zu dem allgemeinen Abbildungssatze geführt." (Archiv der Mathematik und Physik.)

Konforme Abbildungen. Von Studienrat *E. Wicke,* Berlin. Mit 38 Fig. im Text. [59 S.] kl. 8. 1927. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 73.) Kart. *RM* 1.20

Die Idee der Riemannschen Fläche. Von Dr. *H. Weyl,* Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. 2., verb. Aufl. Mit 28 Fig. im Text. [VIII u. 183 S.] gr. 8. 1923. (Math. Vorles. a. d. Univ. Göttingen Bd. 5.) Geb. *RM* 8.—

Der erste Teil enthält eine Topologie der Riemannschen Flächen, der zweite einen Abriß der Theorie der Funktionen auf Riemannschen Flächen. Den Abschluß bildet das prinzipiell Wichtigste aus der Uniformisierungstheorie (Theorie der automorphen Funktionen); sie liefert diejenigen Gebilde (Nicht-Euklidische Bewegungsgruppen), in denen die Idee der Riemannschen Fläche ihre reinste, von allen Zufälligkeiten befreite Verkörperung findet.

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Von Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke,* Prof. a. d Techn. Hochschule in Braunschweig.

I. Teil: Die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. Mit 83 Fig. [X u. 500 S.] gr. 8. 1916. Geh. *RM* 13.—, geb. *RM* 16.—

II. Teil: Die algebraischen Ausführungen. Mit 40 Fig. [VIII u. 546 S.] gr. 8. 1922. Geh. *RM* 15.—, geb. *RM* 18.—

III. Teil: [In Vorb. 1929]

Vorlesungen über elliptische Funktionen. Von *B. Riemann.* Mit Zusätzen herausg. von Dr. *H. Stahl,* weil Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 20 Fig. [VIII u. 144 S.] gr. 8. 1899. Geh. *RM* 5.60

Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Von Dr. *R. Fueter,* Prof. a. d. Univ. Zürich. (Teubn. Lehrbücher der math. Wissensch. Bd. XLI, 1 u. 2.)

I. Teil. Mit 16 Fig. im Text. [VII u. 142 S.] g. 8. 1924. Geh. *RM* 7.—, geb. *RM* 8.40

II. Teil. Mit 4 Fig. im Text. [VI u. 217 S.] gr. 8. 1927. Geh. *RM* 10.—, geb. *RM* 11.60

Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Von Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke,* Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig, und Geh. Reg.-Rat Dr. *F. Klein,* weil. Prof. a. d. Univ. Göttingen.

I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. 2. Aufl. Mit 192 Fig. [XVI u. 634 S.] gr. 8. 1926. Geh. *RM* 26.—

II. Band: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. 2. Aufl. Mit 114 Fig. [XIV u. 668 S.] gr. 8. 1926. Geh. *RM* 28.—

Vorlesungen über algebraische Geometrie. Geometrie auf einer Kurve. Riemannsche Flächen. Abelsche Integrale. Von Dr. *F. Severi,* Prof. a. d Univ. Rom. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ministerialrat Prof. Dr. *E. Löffler,* Stuttgart. [XVI u. 408 S.] gr. 8. 1921. Geh. *RM* 12.—, geb. *RM* 14.60

Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Geh. Bergrat Dr. *E. Jahnke,* weil. Prof. an der Techn. Hochsch. Berlin, und Dr. *F. Emde,* Prof. an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. 2., unveränd. Nachdr. d. 1. Aufl. Mit 53 Fig. [XII u. 176 S.] gr. 8. (1909) 1928. (Samml. math.-phys. Lehrb. Bd. 5.) Geb. *RM* 8.—

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausg. von Dr. *E. Salkowski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin, u. Dr. *H. E. Timerding*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig.

I. Band: Analysis. Herausg von *E. Salkowski.*

1. Teilband: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] gr. 8. 1910. Geb. RM 18.—
2. Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie. Mit 26 Fig. im Text. [XII u. S 529—1023.] gr. 8. 1927. Geb. RM 18.—
3. Teilband: Reelle Funktionen, Neuere Entwicklungen, Zahlentheorie. Mit Fig. gr. 8. 1929. Geb. RM 22.—

II. Band: Geometrie. Herausg. von *H. E. Timerding.*

1. Teilband: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Fig. [XVIII u. 534 S.] gr. 8. 1910. Geb. RM 18.—
2. Teilband: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. im Text. [XII u. 628 S.] gr. 8. 1922. Geh. RM 17.—, geb. RM 20.—

Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von † Dr. G. Bauer. In 4., verm. Aufl. dargest. von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 16 Fig. im Text u. auf 1 Taf. [X u. 334 S.] gr. 8. 1928. Geb. RM 20.—

Höhere Algebra. Deutsche Bearbeitung des Werkes: Dickson, Modern algebraic theories. Von Studienassessor *E. Bodewig*, Mörs (Rhld.). Mit 3 Fig. [ca. VIII u. 240 S.] gr. 8. 1929. Geh. RM 14.—, geb. RM 18.—

Praktische Infinitesimalrechnung. Von *F. F. P. Bisacre,* M. A. (Chartered Civil Engeneer), Ascania Helensburgh. Deutsch von Dr. *E. Trefftz*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden, und Dr. phil. *E. König*, Elberfeld. Mit 104 Abb. u. 3 Taf. [XII u. 364 S.] 8. 1929. Geh RM 16.—, geb. RM 18.—

Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von Dr. *G. Wiarda*, Prof. a. d. Techn. Hochschule i. Dresden. (Samml. math.-phys. Lehrb. Bd. 25.) [In Vorb. 1929]

Dimensionstheorie. Von Dr. *K. Menger,* Prof. a. d. Univ. Wien. [IV u. 319 S] gr. 8. 1928. Geh. RM 22.—, geb. RM 24.—

Die von Menger und Urysohn begründete Dimensions- und Kurventheorie findet in dem Werk eine systematische Darstellung. In einem einführenden Kapitel werden die wichtigsten elementaren Sätze der Punktmengenlehre entwickelt, so daß die Lektüre des Buches keine speziellen Vorkenntnisse voraussetzt. Nach einer Darstellung der Geschichte des alten Dimensionsproblems, dessen besondere Wichtigkeit immer wieder von hervorragenden Mathematikern und Philosophen betont wurde, werden die Hauptergebnisse der neuen Theorie nach den Methoden von Menger und von Hurewicz bewiesen. Eingehende Schilderung finden die Ausblicke, welche die neue Theorie auf die gesamte Lehre vom Raum eröffnet.

Partial differential equations of mathematical physics. By † *Arthur Gordon Webster,* A.B. (Harv.), Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Director of the Physical Laboratory, Clark University, Worcester, Mass. Ed. by *Samuel J. Plimpton*, Ph. D. (Yale.) Assistent Prof. of Physics, Polytechnic Institute, Worcester, Mass. Mit Fig. [VIII u. 440 S.] gr. 8. 1927. (Teubn. Lehrbücher d. math. Wiss. Bd. XLII.) Geh. RM 23.—, geb. RM 25.—

Partielle Differentialgleichungen. Deutsche Ausgabe von *Webster,* Partial Differential Equations. Hrsg. von Dr. *G. Szegö,* Prof. a. d Univ. Königsberg/Pr. (Teubn. Lehrb. d math. Wiss. Bd. XLIII) [U. d. Pr. 1929]

Mathematisches Praktikum. Von Dr. *H. v. Sanden,* Prof. a. d. Techn. Hochschule in Hannover. (Teubn. math. Leitf. Bd. 27)

1. Band. Mit 17 Fig. im Text sowie 20 Zahlentaf. als Anhang. [V u. 122 S.] 8. 1928. Geb. RM 6.80
2. Band. [In Vorb. 1929]

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin